

## 1 Convergence

### Exercice 1 ★ Convergence d'intégrales impropres - 1 –

Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

$$\begin{array}{ll} 1. \int_0^1 \ln t dt & 2. \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ 3. \int_0^{+\infty} x(\sin x)e^{-x} dx & 4. \int_0^{+\infty} (\ln t)e^{-t} dt \\ 5. \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1629]

### Exercice 2 ★ Convergence d'intégrales impropres - 2 –

Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

$$\begin{array}{ll} 1. \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1} & 2. \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt \\ 3. \int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1630]

### Exercice 3 ★★ Convergence d'intégrales impropres - 3 –

Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

$$\begin{array}{ll} 1. \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt & 2. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx \\ 3. \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}} dt \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1631]

### Exercice 4 ★★★ Intégrales de Bertrand –

Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , on souhaite déterminer la nature de

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

1. On suppose  $\alpha > 1$ . En comparant avec une intégrale de Riemann, démontrer que l'intégrale étudiée est convergente.

2. On suppose  $\alpha = 1$ . Calculer, pour  $X > e$ ,  $\int_e^X \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$ . En déduire les valeurs de  $\beta$  pour lesquelles l'intégrale converge.

3. On suppose  $\alpha < 1$ . En comparant à  $1/t$ , démontrer que l'intégrale étudiée diverge.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1635]

### Exercice 5 ★★★★★ Convergence d'intégrales impropres à paramètres - 2 –

Discuter, suivant la valeur de  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la convergence des intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt \quad 2. \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x}) dx$$

**Exercice 6** ★★★★★ **Convergence d'intégrales impropres avec développements limités –**

Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

1.  $\int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$
2.  $\int_0^{+\infty} \left(1+t \ln \left(\frac{t}{t+1}\right)\right) dt$
3.  $\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+1} - x\sqrt[3]{x^3+ax}\right) dx, a \in \mathbb{R}.$
4.  $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt.$

**Exercice 7** ★★★★★ **Critère de Cauchy –**

1. Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On suppose que  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge, et soit  $(x_n)$  et  $(y_n)$  deux suites tendant vers  $+\infty$ . Démontrer que  $\int_{x_n}^{y_n} f(t) dt$  tend vers 0.
2. En déduire que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt$  diverge.

**Exercice 8** ★★★★★ **Convergence et convergence absolue –**

1. Montrer que les intégrales impropres  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$  sont convergentes. On souhaite prouver que la fonction  $\frac{\sin t}{t}$  n'est pas intégrable, c'est-à-dire que  $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$  diverge.
2. Méthode 1. Prouver que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin t| \geq \frac{1-\cos 2t}{2}$ . En déduire le résultat.
3. Méthode 2. Prouver que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi |\sin t| dt.$$

Retrouver alors le résultat.

**Exercice 9** ★★★★★ **Transformée de Laplace –**

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $s_0 \in \mathbb{R}$  tels que  $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-s_0 t} dt$  converge.

1. Soit  $F$  une primitive de  $t \mapsto f(t) e^{-s_0 t}$  sur  $[0, +\infty[$ . Démontrer que  $F$  est bornée sur  $[0, +\infty[$ .
2. En déduire que, pour tout  $s > s_0$ ,  $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$  converge.
3. Sur le même modèle, démontrer que si  $g : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue telle que  $\int_1^{+\infty} g(t) dt$  converge, alors  $\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t} dt$  converge.

**Exercice 10** ★★★★★ **Méthode par éclatement –**

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$1. \int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} dx \quad 2. \int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{\sin x}{x^\alpha}\right) dx, \alpha > 0$$

**Exercice 11** ★★★★★ **Avec le critère des séries alternées –**

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction continue décroissante, de limite nulle en  $+\infty$ . On pose  $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin(t) dt$ .

1. Montrer que la série de terme général  $u_n$  est convergente.
2. En déduire que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) \sin(t) dt$  est convergente. Quel est son signe ?
3. On suppose  $f(x) \geq 1/x$  pour  $x \geq x_0$ . Prouver que  $\int_0^{+\infty} f(t) \sin(t) dt$  n'est pas absolument convergente.

## 2 Calcul

### Exercice 12 ★ Logarithme à la puissance $n$ –

Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de  $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$ .

Indication ▼ Correction ▼

[1644]

### Exercice 13 ★★ Changements de variables –

1. Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$  converge, puis, avec le changement de variables  $u = 1/t$ , que  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0$ .
2. Soit  $a > 0$ . Calculer  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt$ .

Indication ▼ Correction ▼

[1645]

### Exercice 14 ★★★ Changement de variable –

Soit  $f$  une fonction continue bornée sur  $[0, +\infty[$ .

1. Démontrer que les intégrales  $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2} dx$  sont convergentes.
2. Démontrer qu'elles sont égales.
3. Application : pour  $n \geq 0$ , calculer  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$ .

Indication ▼ Correction ▼

[1646]

### Exercice 15 ★★★★★ Une intégrale comme somme d'une série –

Le but de l'exercice est de prouver la relation suivante :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

1. Prouver la convergence de l'intégrale.
2. Montrer que, pour tout entier  $k \geq 0$ , l'intégrale  $I_k = \int_0^1 t^k \ln t dt$  converge, puis calculer  $I_k$ .
3. Montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt - \int_0^1 \frac{t^{2n+2} \ln t}{t^2-1} dt$ .
4. Démontrer que la fonction  $t \mapsto \frac{t^2 \ln t}{t^2-1}$  se prolonge par continuité en 0 et en 1. En déduire qu'il existe une constante  $M > 0$ , qu'on ne cherchera pas à calculer, telle que, pour tout  $t \in ]0, 1[$ ,  $\left| \frac{t^2 \ln t}{t^2-1} \right| \leq M$ .
5. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n+2} \ln t}{t^2-1} dt = 0$ , puis la relation demandée.

Indication ▼ Correction ▼

[1648]

### Exercice 16 ★★ Différence d'arctangente –

1. Démontrer la convergence de  $\int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x)) dx$ .
2. Démontrer que  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_X^{X+1} \arctan(x) dx = \frac{\pi}{2}$ .
3. Calculer  $\int_0^1 \arctan(x) dx$ .
4. Calculer  $\int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x)) dx$ .

Indication ▼ Correction ▼

[1649]

### Exercice 17 ★★★★★ Quelques calculs –

Justifier la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

1.  $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt$
2.  $\int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt$
3.  $\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-at} dt, a > 0.$

**Exercice 18** ★★ Intégrale de Dirichlet –

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ . Pour chaque entier  $n$ , on note

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt \text{ et } J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt.$$

1. Justifier que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $I_n$  et  $J_n$  sont bien définis.
2. Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $I_n - I_{n-1} = 0$ . En déduire la valeur de  $I_n$ .
3. Soit  $\phi : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que  $\int_0^{\pi/2} \phi(t) \sin((2n+1)t) dt$  tend vers 0.
4. Démontrer que la fonction  $\phi : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ , définie sur  $]0, \pi/2]$ , se prolonge en une fonction de classe  $C^1$  sur  $[0, \pi/2]$ .
5. En déduire que  $J_n - I_n \rightarrow 0$ .
6. Démontrer, en utilisant un changement de variables, que  $J_n \rightarrow I$ .
7. En déduire la valeur de  $I$ .

Indication ▼ Correction ▼

[1651]

**Exercice 19** ★★★ Application à la positivité de polynômes –

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) \geq 0$ . On note  $n = \deg(P)$  et  $Q = \sum_{k=0}^n P^{(k)}$ .

1. Démontrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$Q(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} P(t) dt.$$

2. En déduire que  $Q \geq 0$ .

Indication ▼ Correction ▼

[3446]

**Exercice 20** ★★★★★ Un calcul astucieux! –

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ .
2. Justifier la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt$ .
3. En linéarisant  $\sin^3(t)$ , calculer cette intégrale.

Indication ▼ Correction ▼

[3444]

### 3 Exercices théoriques

**Exercice 21** ★ Critère de Cauchy (sens facile) –

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ . On suppose que  $f$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Démontrer que  $\int_x^{x+1} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Indication ▼ Correction ▼

[1653]

**Exercice 22** ★ Intégrabilité par encadrement –

Soit  $I$  un intervalle et  $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$  continues par morceaux. On suppose que  $f$  et  $h$  sont intégrables sur  $I$  et que  $f \leq g \leq h$ . Démontrer que  $g$  est intégrable sur  $I$ .

Indication ▼ Correction ▼

[3443]

**Exercice 23** ★★ Limite en  $+\infty$  –

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f$  et  $f'$  soient intégrables sur  $[0, +\infty[$ . Démontrer que  $f$  tend vers 0 en  $+\infty$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1657]

**Exercice 24** ★★ Comportement en l'infini –

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et intégrable.

1. Démontrer que, pour tout  $A > 0$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x \geq A$  tel que  $|xf(x)| \leq \varepsilon$ .
2. En déduire l'existence d'une suite  $(x_n)$  tendant vers  $+\infty$  telle que  $(x_n f(x_n))$  tend vers 0.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1658]

**Exercice 25** ★★ Fonction décroissante –

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue décroissante telle que  $\int_0^{+\infty} f(t)dt$  converge.

1. Démontrer que  $f \geq 0$ .
2. Démontrer que  $f$  tend vers 0 en  $+\infty$ .
3. Justifier que  $\int_{x/2}^x f(t)dt$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
4. En déduire que  $xf(x)$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1654]

**Exercice 26** ★★★★★ Fonction intégrable et limites en l'infini –

Soit  $a$  un réel et  $f$  une application continue de  $[a, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ , intégrable sur  $[a, +\infty[$ .

1. Montrer que si  $f$  admet une limite en  $+\infty$ , cette limite est nécessairement nulle.
2. Montrer que si  $f$  est uniformément continue, alors elle tend vers 0 en  $+\infty$ .
3. Le résultat subsiste-t-il si on suppose simplement  $f$  continue ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1655]

**Exercice 27** ★★ Sommes de Riemann –

Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue et croissante. On note  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$ .

1. On suppose que  $\int_a^b f(t)dt$  converge. Montrer que la suite  $(S_n)$  converge vers  $\int_a^b f(t)dt$ .
2. On suppose que  $\int_a^b f(t)dt$  diverge. Montrer que la suite  $(S_n)$  tend vers  $+\infty$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1656]

**Exercice 28** ★★ Cauchy-Schwarz –

Soit  $f$  une fonction continue de carré intégrable de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Prouver que, pour tous  $0 \leq a \leq b$ , on a

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \sqrt{b-a} \left( \int_a^b f^2(t)dt \right)^{1/2}.$$

2. En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)dt = 0.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1659]

**Exercice 29** ★★★★★ Dérivée –

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  de classe  $C^1$  telle qu'il existe  $a < 0$  satisfaisant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = a$ . Montrer que  $f$  et  $f'$  sont intégrables sur  $[0, +\infty[$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1660]

---

## 4 Intégration des relations de comparaison

### Exercice 30 ★★★ Intégration des relations de comparaison –

Soient  $f, g : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a, b[$  telles que  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

1. On suppose dans cette question que  $g =_b o(f)$ .

On suppose que  $\int_a^b f(t)dt$  converge. Montrer que

$$\int_x^b g(t)dt =_b o\left(\int_x^b f(t)dt\right).$$

On suppose que  $\int_a^b f(t)dt$  diverge. Montrer que

$$\int_a^x g(t)dt =_b o\left(\int_a^x f(t)dt\right).$$

2. On suppose que  $\int_a^b f(t)dt$  converge. Montrer que

$$\int_x^b g(t)dt =_b o\left(\int_x^b f(t)dt\right).$$

3. On suppose que  $\int_a^b f(t)dt$  diverge. Montrer que

$$\int_a^x g(t)dt =_b o\left(\int_a^x f(t)dt\right).$$

4. On suppose désormais que  $g \sim_b f$ . Dédurre de la question précédente que, si  $\int_a^b f(t)dt$  converge, alors

$$\int_x^b g(t)dt \sim_b \int_x^b f(t)dt;$$

si  $\int_a^b f(t)dt$  diverge, alors

$$\int_a^x g(t)dt \sim_b \int_a^x f(t)dt;$$

5. si  $\int_a^b f(t)dt$  converge, alors

$$\int_x^b g(t)dt \sim_b \int_x^b f(t)dt;$$

6. si  $\int_a^b f(t)dt$  diverge, alors

$$\int_a^x g(t)dt \sim_b \int_a^x f(t)dt;$$

7. Donner un équivalent de  $\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[1662]

---

### Exercice 31 ★ Équivalent –

Donner un équivalent de  $\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[1663]

---

### Exercice 32 ★ Équivalent de la queue de la gaussienne –

1. Justifier la convergence de  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

2. Démontrer que, pour tout  $x > 0$ , on a

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt.$$

3. En déduire un équivalent simple de  $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1664]

---

### Exercice 33 ★★ Équivalent du reste de l'intégrale de $e^{-t}/t$ –

Déterminer un équivalent simple en  $+\infty$  de  $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1665]

---

### Exercice 34 ★★★★★ Développement asymptotique d'une intégrale –

Donner un développement asymptotique à trois termes au voisinage de  $+\infty$  de  $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1666]

---

### Exercice 35 ★★★★★ Développement asymptotique du logarithme intégral –

On considère le logarithme intégral qui est la fonction définie par

$$\forall x \geq 2, li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

Pour tout  $n \geq 1$ , donner un développement asymptotique de  $li(x)$  à  $n$  termes lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1667]

## 5 Autres estimations de restes ou d'intégrales partielles

---

### Exercice 36 ★★ Une limite –

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, et  $b > a > 0$  deux réels.

1. On suppose que  $f(0) = 0$ . Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt = 0.$$

2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt$  si on ne suppose plus que  $f(0) = 0$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1661]

---

### Exercice 37 ★★ Estimation d'un reste –

Déterminer la limite, lorsque  $x \rightarrow 0^+$ , de  $\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1639]

---

### Exercice 38 ★★★★★ Estimation d'un reste –

Soit  $0 < a < b$ . Déterminer un équivalent, lorsque  $x \rightarrow +\infty$  de  $\int_{ax}^{bx} \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3445]

## 6 Application à l'étude de fonctions définies par des intégrales

### Exercice 39 ★★ Une intégrale dépendant d'un paramètre –

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On définit, lorsque l'intégrale est convergente, la fonction

$$\phi(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de  $\phi$ .
2. Démontrer que  $\phi$  est décroissante sur son domaine de définition.
3. Déterminer la limite de  $\phi$  en  $+\infty$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1668]

### Exercice 40 ★★★ Lemme de Riemann-Lebesgue –

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  intégrable.

1. Démontrer que, pour tout  $A > 0$ ,  $\int_0^A f(t) \cos(xt) dt$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
2. En déduire que  $\int_0^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1669]

### Exercice 41 ★★★ –

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , sous réserve d'existence,  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+n} dx$ .

1. Justifier l'existence de  $I_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Établir que  $(I_n)$  converge vers 0.
3. Démontrer que  $I_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3442]

### Exercice 42 ★★★ Fonction dilogarithme –

L'objectif de ce problème est l'étude de la fonction dilogarithme définie par :

$$Li(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1-t} dt.$$

1. Questions préliminaires : on pose, pour  $t > 0$  et  $t \neq 1$  et pour  $x > 0$ ,

$$f(t) = \frac{\ln(t)}{1-t}, \quad g(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Démontrer que  $f$  se prolonge par continuité en 1 et que  $g$  se prolonge par continuité en 0. Démontrer que, pour tout  $x \geq 0$ ,  $0 \leq g(x) \leq 1$ .

2. Démontrer que  $f$  se prolonge par continuité en 1 et que  $g$  se prolonge par continuité en 0.

3. Démontrer que, pour tout  $x \geq 0$ ,  $0 \leq g(x) \leq 1$ .

4. Démontrer que le domaine de définition de la fonction dilogarithme est  $[0, +\infty[$ .

5. Justifier soigneusement que la fonction dilogarithme est dérivable sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  et donner l'expression de sa dérivée.

6. Pourquoi  $Li$  est-elle continue en 0 ?

7. Dans cette question, on se propose de calculer  $Li(0)$ .

Démontrer que  $Li(0) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$ . Justifier que, pour tout  $k \geq 1$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx$  est convergente, et calculer sa valeur. Soit  $(S_n)$  la suite définie pour tout  $n \geq 1$  par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx.$$

Démontrer que

$$Li(0) - S_n = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx.$$



En déduire que

$$0 \leq Li(0) - S_n \leq \frac{1}{n}.$$

En admettant que

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

démontrer que

$$Li(0) = \frac{\pi^2}{6}.$$

8. Démontrer que  $Li(0) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$ .

9. Justifier que, pour tout  $k \geq 1$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx$  est convergente, et calculer sa valeur.

10. Soit  $(S_n)$  la suite définie pour tout  $n \geq 1$  par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx.$$

Démontrer que

$$Li(0) - S_n = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx.$$

11. En déduire que

$$0 \leq Li(0) - S_n \leq \frac{1}{n}.$$

12. En admettant que

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

démontrer que

$$Li(0) = \frac{\pi^2}{6}.$$

13. Quelle est la nature de  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t} dt$  ? En déduire la limite de  $Li(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

14. Donner la représentation graphique de la fonction  $Li$ .

15. On pose, pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,

$$u(x) = Li(x) + Li(1-x),$$

$$v(x) = -\ln(1-x) \ln(x).$$

Démontrer qu'il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,

$$u(x) = v(x) + C.$$

16. Déterminer  $C$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[1671]

---

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

Commencer par trouver des intervalles où la fonction est continue, puis étudier le problème au bord. Il y a deux techniques classiques :

ou bien on connaît une primitive, et dans ce cas on peut intégrer et appliquer la définition de la convergence d'une intégrale impropre ; dans les cas les plus fréquents, on compare !

Dans le détail des questions, on peut

1. Trouver une primitive ou comparer.
  2. Comparer à une intégrale de Riemann.
  3. Prouver la convergence absolue.
  4. Comparer en 0 (utiliser une intégrale précédente), et majorer à l'infini.
  5. Trouver des équivalents en 0 et en 1.
- 

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

1. Trouver un équivalent en 0.
  2. Majorer.
  3. Majorer.
- 

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

1. Équivalent en 0 et comparer à  $1/t^\alpha$  en l'infini.
  2. Équivalent en 1 et comparer à  $1/t^\alpha$  en l'infini.
  3. Comparer à  $\frac{1}{t^\alpha}$ , en écrivant cette dernière fonction sous une forme exponentielle.
- 

---

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

1. Comparer la fonction à intégrer à  $1/t^\gamma$  avec  $\gamma \in ]1, \alpha[$ .
  2. C'est de la forme  $u'u^{-\beta}$ . Attention au cas  $\beta = 1$ .
  - 3.
- 

---

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

---

---

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

Commencer par trouver des intervalles où la fonction est continue, puis étudier le problème au bord. Il y a deux techniques classiques :

ou bien on connaît une primitive, et dans ce cas on peut intégrer et appliquer la définition de la convergence d'une intégrale impropre ; dans les cas les plus fréquents, on compare !

Dans le détail des questions, on peut

1. Faire un développement limité en 1 de  $\sqrt{t}$
  2. Faire un développement limité de ce qu'il y a à l'intérieur du logarithme au voisinage de  $+\infty$
  3. Factoriser par le terme dominant dans les racines et faire un développement limité de  $(1+u)^\alpha$ .
  4. Faire un dl pour étudier le problème en 0.
- 

---

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

1. Écrire l'intégrale entre  $x_n$  et  $y_n$  à l'aide d'une primitive de  $f$ . Quelle information sur cette primitive nous donne la convergence de l'intégrale ?
  2. Prendre  $x_n$  et  $y_n$  de sorte que  $-t \sin t \geq 0$  si  $t \in [x_n, y_n]$ .
- 

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

1. Intégrer par parties.
2.  $|\sin t| \geq \sin^2 t$ , puis utiliser la question précédente.
3. Minorer  $1/t$  sur l'intervalle considéré, puis utiliser la périodicité de  $|\sin t|$ .

---

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

---

1. Quelle propriété sur  $F$  est une conséquence de la convergence de  $\int_0^{+\infty} f(t)dt$  ?
  2. Faire une intégration par parties en utilisant  $F$ .
  3. Considérer cette fois une primitive de  $g$ .
- 

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

---

Il faut, en utilisant les développements limités, décomposer les fonctions en somme de fonctions dont l'étude est plus simple.

1. Écrire que la fonction est égale à

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + O(x^{-3/2}).$$

- 2.
- 

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

---

1. Appliquer le critère des séries alternées.
  2. Pour  $X$  dans  $[n\pi, (n+1)\pi[$ , majorer  $\int_{n\pi}^X f(t) \sin(t) dt$ .
  3. Montrer que la série  $\sum u_n$  n'est pas absolument convergente.
- 

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

---

Intégrer par parties pour obtenir une relation entre  $I_n$  et  $I_{n-1}$ .

---

**Indication pour l'exercice 13 ▲**

---

Pour justifier la convergence des intégrales, séparer le problème en 0 (on a un équivalent facile) de celui en  $+\infty$  (on peut facilement dominer la fonction). Pour la question 2., faire le changement de variables  $t = ax$ .

---

**Indication pour l'exercice 14 ▲**

---

- 1.
  2. Changement de variables  $u = 1/x$ .
  3. Trouver  $f$ , puis faire la somme des deux intégrales...
- 

**Indication pour l'exercice 15 ▲**

---

1. En 1, la fonction se prolonge par continuité. En 0, à quoi est-elle équivalente ?
  2. Intégrer par parties.
  3. Faire la somme et utiliser la question précédente.
  4. Que dire d'une fonction continue sur un segment ?
  5. Mettre  $t^2$  en facteur.
- 

**Indication pour l'exercice 16 ▲**

---

1. Comment peut-on majorer  $|\arctan(x+1) - \arctan(x)|$  ???
  2. Encadrer la fonction sous l'intégrale.
  3. Intégrer par parties.
  4. Prendre l'intégrale entre 0 et  $X$ , la séparer en deux, et faire un changement de variables dans une des deux intégrales.
- 

**Indication pour l'exercice 17 ▲**

---

1. Faire le changement de variables  $u = \sqrt{1-t}$ .
  2. Faire le changement de variables  $u = \sqrt{t}$ , puis des intégrations par parties.
  3. Écrire  $\sin(t)$  comme la partie imaginaire de  $e^{it}$ .
- 

#### Indication pour l'exercice 18 ▲

---

1. Les fonctions se prolongent par continuité.
  2. Utiliser une formule de trigo.
  3. Intégrer par parties.
  4. Théorème de prolongement d'une dérivée ?
  5. Utiliser les deux questions précédentes.
  - 6.
  - 7.
- 

#### Indication pour l'exercice 19 ▲

---

1. Écrire plutôt ceci sous la forme

$$e^{-x}Q(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t}P(t)dt$$

et prouver le résultat par dérivation.

- 2.
- 

#### Indication pour l'exercice 20 ▲

---

1. Écrire  $\sin(t) = t + t^2g(t)$  où  $g$  est bornée au voisinage de 0.
  - 2.
  3. Exprimer  $\int_x^y \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt$  en fonction de  $\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$  et  $\int_y^{3y} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$  en utilisant la linéarisation de  $\sin^3(t)$  et un changement de variables. Utiliser ensuite le résultat de la première question.
- 

#### Indication pour l'exercice 21 ▲

---

---

#### Indication pour l'exercice 22 ▲

---

Considérer  $g - f$  et  $h - f$ .

---

#### Indication pour l'exercice 23 ▲

---

Démontrer d'abord que  $f$  admet une limite en l'infini en l'écrivant comme primitive de  $f'$ .

---

#### Indication pour l'exercice 24 ▲

---

1. Raisonner par l'absurde.
  2. Utiliser la question précédente pour de bonnes valeurs de  $A$  et de  $\varepsilon$ .
- 

#### Indication pour l'exercice 25 ▲

---

1. Procéder par l'absurde.
  2. Procéder par l'absurde.
  3. Exprimer cette intégrale en fonction de  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ .
  4. Minorer l'intégrale.
- 

#### Indication pour l'exercice 26 ▲

---

1. Utiliser le critère d'équivalent.
2. Raisonner par l'absurde.

3. Construire une fonction avec un pic entre  $n$  et  $n + 1/2^n$ , pour chaque entier  $n$ .

---

**Indication pour l'exercice 27 ▲**

Encadrer les intégrales entre  $a + k \frac{b-a}{n}$  et  $a + (k+1) \frac{b-a}{n}$ , sachant que  $f$  est croissante. Puis passer à la limite.

---

**Indication pour l'exercice 28 ▲**

1. C'est une application directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz
  2. Intégrer entre 0 et  $A$ , puis entre  $A$  et  $x$  avec  $A$  grand !
- 

**Indication pour l'exercice 29 ▲**

Comparer  $f$  à une fonction exponentielle  $e^{ax/2}$  pour prouver que  $f$  est intégrable. L'intégrabilité de  $f'$  suit du fait qu'elle est de signe constant et du comportement de  $f$ .

---

**Indication pour l'exercice 30 ▲**

1. Fixer  $\varepsilon > 0$  et considérer  $x$  tel que, pour  $t \in ]x, b[$ , on a  $|g(t)| \leq \varepsilon f(t)$ . Puis intégrer. Il faut faire pareil, mais en découpant l'intégrale en deux et en utilisant que l'intégrale  $\int_a^x f(t)dt$  tend vers  $+\infty$ .
  2. Fixer  $\varepsilon > 0$  et considérer  $x$  tel que, pour  $t \in ]x, b[$ , on a  $|g(t)| \leq \varepsilon f(t)$ . Puis intégrer.
  3. Il faut faire pareil, mais en découpant l'intégrale en deux et en utilisant que l'intégrale  $\int_a^x f(t)dt$  tend vers  $+\infty$ .
  4. Pour cette question, écrire  $g \sim_b f$  sous la forme  $f - g = o(f)$ .
  5. Trouver un équivalent de  $\frac{\arctan t}{t}$  au voisinage de  $+\infty$ , puis utiliser la question précédente.
- 

**Indication pour l'exercice 31 ▲**

Trouver un équivalent de  $\frac{\arctan t}{t}$  au voisinage de  $+\infty$  et appliquer le théorème de comparaison des intégrales à paramètres.

---

**Indication pour l'exercice 32 ▲**

1. Comparer avec  $t^2$ .
  2. Intégrer par parties.
  3. Appliquer le théorème d'intégration des relations de comparaison pour "éliminer" la dernière intégrale dans l'égalité de la question précédente.
- 

**Indication pour l'exercice 33 ▲**

Intégrer par parties puis utiliser le théorème d'intégration des relations de comparaison.

---

**Indication pour l'exercice 34 ▲**

Intégrer par parties (trois fois) puis intégrer les relations de comparaison.

---

**Indication pour l'exercice 35 ▲**

Réaliser des intégrations par parties successives, puis pour la dernière intégrale, utiliser une intégration des relations de comparaison.

---

**Indication pour l'exercice 36 ▲**

1. Majorer l'intégrale.
2. Se ramener à la question précédente.

---

**Indication pour l'exercice 37 ▲**

Utiliser un développement limité de  $\sin$ .

---

**Indication pour l'exercice 38 ▲**

Remplacer l'intégrande par  $\frac{\ln(t)}{t}$ .

---

**Indication pour l'exercice 39 ▲**

1. Séparer les cas  $x \leq 0$  et  $x > 0$ , et procéder par équivalent en  $+\infty$ .
  2. Intégrer une inégalité.
  3. Majorer la fonction (le plus simplement du monde !).
- 

**Indication pour l'exercice 40 ▲**

1. Intégrer par parties.
  2. Fixer  $\varepsilon > 0$  puis  $A$  tel que  $\int_A^{+\infty} |f(t)| dt \leq \varepsilon$ , puis couper l'intégrale en deux.
- 

**Indication pour l'exercice 41 ▲**

1. Majorer !
  2. Majorer !
  3. Remplacer la fonction par  $\frac{e^{-x}}{n}$ .
- 

**Indication pour l'exercice 42 ▲**

1. Convexité.
  - 2.
  3. Convexité.
  4. Attention à la définition en 0.
  - 5.
  - 6.
  7. Faire un changement de variables. Faire une intégration par parties. Somme d'une suite géométrique. Reconnaître  $g$  pour majorer. Passage à la limite.
  8. Faire un changement de variables.
  9. Faire une intégration par parties.
  10. Somme d'une suite géométrique.
  11. Reconnaître  $g$  pour majorer.
  12. Passage à la limite.
  - 13.
  - 14.
  15. Dériver  $u - v$ .
  16. Faire tendre  $x$  vers 0.
-

---

**Correction de l'exercice 1 ▲**

1. La fonction  $x \mapsto \ln x$  est continue sur  $]0, 1]$ , le problème de convergence est en 0. Pour le traiter, on peut : remarquer qu'on connaît une primitive de  $\ln$ , à savoir  $x \mapsto x \ln x - x$ . On a donc

$$\int_X^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_X^1 = -X \ln X + X - 1$$

qui tend vers  $-1$  si  $X$  tend vers 0. comparer : On sait que  $\sqrt{x} \ln x \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0$ . Ceci signifie que  $\ln x = o(1/\sqrt{x})$  en 0. Puisque  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  converge, on en déduit par critère de comparaison que  $\int_0^1 \ln x dx$  converge.

2. remarquer qu'on connaît une primitive de  $\ln$ , à savoir  $x \mapsto x \ln x - x$ . On a donc

$$\int_X^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_X^1 = -X \ln X + X - 1$$

qui tend vers  $-1$  si  $X$  tend vers 0.

3. comparer : On sait que  $\sqrt{x} \ln x \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0$ . Ceci signifie que  $\ln x = o(1/\sqrt{x})$  en 0. Puisque  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  converge, on en déduit par critère de comparaison que  $\int_0^1 \ln x dx$  converge.

4. Ici, on ne connaît pas de primitive de  $e^{-t^2}$  qui s'exprime facilement à l'aide des fonctions usuelles (en fait, c'est même impossible). On doit donc comparer. Commençons par remarquer que  $t \mapsto e^{-t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . Le problème de convergence de l'intégrale ne se pose donc qu'au voisinage de  $+\infty$ . Mais il est facile de voir que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u e^{-u} = 0.$$

Autrement dit,  $e^{-x^2} = o(1/x^2)$ . Ainsi, puisque  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  converge, il en est de même de  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

5. Là encore, on va majorer, et on va même prouver que l'intégrale est absolument convergente. Pour cela, on remarque que, pour  $x \geq 0$ ,  $|x e^{-x} \sin x| \leq x e^{-x}$ . D'autre part, puisque  $x^3 e^{-x} \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , on en déduit que  $x e^{-x} \sin(x) = o(1/x^2)$ . Ainsi, l'intégrale est absolument convergente.

6. La fonction  $t \mapsto \ln(t) e^{-t}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . En 0, elle est équivalente à  $\ln t$ , fonction négative au voisinage de 0 et intégrable. Par comparaison,  $\int_0^1 \ln t e^{-t} dt$  converge. Au voisinage de l'infini, on remarque, par croissance comparée des fonctions logarithmes, puissance et exponentielle, que  $t^2 \ln t e^{-t}$  tend vers 0 lorsque  $t$  vers  $+\infty$ . Ainsi,  $\ln t e^{-t} = o(1/t^2)$ . Par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente,  $\int_1^{+\infty} \ln t e^{-t} dt$  converge. Ainsi, on a prouvé la convergence de  $\int_0^{+\infty} \ln t e^{-t} dt$ .

7. En 1, la fonction est équivalente à  $\frac{1}{1-t}$ , fonction de signe constant dont l'intégrale est divergente (en 1). Ainsi, l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$  diverge.

---

**Correction de l'exercice 2 ▲**

1. La fonction  $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$  est continue sur  $]0, 1]$ . En 0,  $\frac{1}{e^t - 1}$  est équivalent à  $\frac{1}{t}$ . Par comparaison à une intégrale de Riemann divergente,  $\int_0^1 \frac{dt}{e^t - 1}$  est divergente. A fortiori,  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$  est divergente.

2. La fonction  $t \mapsto \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . De plus, au voisinage de  $+\infty$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \times \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-\sqrt{t}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 e^{-u} = 0$$

par croissance comparée des fonctions polynomiales et exponentielles. Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$  est convergente.

3. La fonction  $t \mapsto \cos^2(1/t)$  est continue sur  $]0, 1]$ . De plus, on a

$$|\cos^2(1/t)| \leq 1.$$

Puisque  $\int_0^1 1 dt$  converge (ce n'est même pas une vraie intégrale impropre), on en déduit que  $\int_0^1 \cos^2(1/t) dt$  est aussi convergente.

---

**Correction de l'exercice 3 ▲**

---

1. La fonction  $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2+1}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . En 0, elle est équivalente à  $\ln t$  qui est intégrable au voisinage de 0. En  $+\infty$ , on écrit simplement que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{3/2} \frac{\ln t}{t^2+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} = 0.$$

Ainsi, par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, la fonction est intégrable au voisinage de  $+\infty$ . En résumé,  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$  converge.

2. La fonction  $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$  est continue sur  $]1, +\infty[$ . En 1, on sait que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\ln x}}{\sqrt{x-1}} = 1$$

et donc

$$\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \sim_1 \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, la fonction  $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$  est intégrable au voisinage de 1. En l'infini, l'idée est que le  $\sqrt{\ln x}$  ne compte presque pas par rapport à  $x^{3/2}$ . Précisément, on écrit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{5/4} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{1/4}} = 0.$$

Ainsi, par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, la fonction est intégrable au voisinage de  $+\infty$ . On en déduit que la fonction est intégrable sur  $]1, +\infty[$ .

3. La difficulté de cette question est qu'il est plus difficile d'avoir une intuition sur la façon dont se comporte  $e^{-\sqrt{\ln t}}$ . Soit  $\alpha > 0$ . On va comparer la fonction à  $\frac{1}{t^\alpha}$ . On a

$$e^{-\sqrt{\ln t}} t^\alpha = e^{-\sqrt{\ln t} + \alpha \ln t} \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, en choisissant  $\alpha = 1$ ,  $\frac{1}{t} = o(e^{-\sqrt{\ln t}})$ . Puisqu'on travaille avec des fonctions positives, et que  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$  diverge, il en est de même de  $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}} dt$ .

#### Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit  $\gamma \in ]1, \alpha[$ . Alors, on a

$$\frac{t^\gamma}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma} (\ln t)^\beta} \rightarrow 0$$

et donc, en notant  $f$  la fonction, on a

$$f(t) =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right).$$

Puisque  $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$  converge, il en est de même de  $\int_e^{+\infty} f$ .

2. Si  $\alpha = 1$ , alors la fonction est de la forme  $u' u^{-\beta}$ . Elle admet donc une primitive de la forme  $\frac{1}{-\beta+1} u^{-\beta+1}$  si  $\beta \neq 1$ , et de la forme  $\ln |\ln u|$  si  $\beta = 1$ . Pour  $\beta \neq 1$ , on a

$$\begin{aligned} \int_e^X \frac{dt}{t (\ln t)^\beta} &= \left[ \frac{1}{-\beta+1} (\ln t)^{-\beta+1} \right]_e^X \\ &= \frac{1}{-\beta+1} \left( (\ln X)^{-\beta+1} - 1 \right) \end{aligned}$$

Lorsque  $X$  tend vers  $+\infty$ , ceci admet une limite finie si et seulement si  $\beta > 1$ . Dans le cas où  $\beta = 1$ , la primitive se calcule un peu différemment :

$$\int_e^X \frac{dt}{t \ln t} = [\ln |\ln t|]_e^X = \ln |\ln X| - \ln |\ln e| = \ln \ln X.$$



Ceci tend vers  $+\infty$ , et donc l'intégrale n'est pas convergente.

3. On remarque que

$$\frac{1}{f(t)} = t^{\alpha-1} (\ln t)^\beta \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{t} =_{+\infty} o(f(t)).$$

Puisque  $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$  diverge, il en est de même de  $\int_e^{+\infty} f(t)dt$ . En conclusion, l'intégrale étudiée converge si et seulement si  $\alpha > 1$  ou  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

1. Remarquons d'abord que la fonction se prolonge par continuité en 0, puisque  $t \ln t \rightarrow 0$  lorsque  $t$  tend vers 0. De plus, au voisinage de  $+\infty$ , la fonction est équivalente à  $\frac{t \ln t}{t^{2\alpha}} = \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}}$ . On distingue alors deux cas :

Si  $\alpha \leq 1$ , alors  $2\alpha - 1 \leq 1$ , et donc  $\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} \geq \frac{1}{t}$  pour  $t$  assez grand. Puisque  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$  est divergente, on en déduit que l'intégrale est divergente. Si  $\alpha > 1$ , alors  $2\alpha - 1 > 1$ . L'idée est que le terme le plus important est le dénominateur,  $\frac{1}{t^{2\alpha-1}}$ . Le logarithme au numérateur nous ennuie un peu, mais on va le traiter en réduisant un peu l'exposant du dénominateur. Précisément, soit  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que  $1 < \gamma < 2\alpha - 1$ . Alors on a

$$t^\gamma \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} = t^{-\delta} \ln t \rightarrow 0$$

avec  $-\delta = \gamma - (2\alpha - 1) < 0$ . On en déduit que

$$\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right).$$

Puisque l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$  converge, il en est de même de  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} dt$  et par suite de  $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$ .

En conclusion, l'intégrale est convergente ssi  $\alpha > 1$ .

2. Si  $\alpha \leq 1$ , alors  $2\alpha - 1 \leq 1$ , et donc  $\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} \geq \frac{1}{t}$  pour  $t$  assez grand. Puisque  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$  est divergente, on en déduit que l'intégrale est divergente.

3. Si  $\alpha > 1$ , alors  $2\alpha - 1 > 1$ . L'idée est que le terme le plus important est le dénominateur,  $\frac{1}{t^{2\alpha-1}}$ . Le logarithme au numérateur nous ennuie un peu, mais on va le traiter en réduisant un peu l'exposant du dénominateur. Précisément, soit  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que  $1 < \gamma < 2\alpha - 1$ . Alors on a

$$t^\gamma \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} = t^{-\delta} \ln t \rightarrow 0$$

avec  $-\delta = \gamma - (2\alpha - 1) < 0$ . On en déduit que

$$\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right).$$

Puisque l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$  converge, il en est de même de  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} dt$  et par suite de  $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$ .

4. La fonction  $f : x \mapsto x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x})$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . Il peut y avoir éventuellement deux problèmes, l'un en 0, l'autre en  $+\infty$ . Pour  $\alpha \geq -1$ , on a au voisinage de  $+\infty$

$$f(x) \geq x^\alpha \geq 0.$$

Comme l'intégrale  $\int_1^{+\infty} x^\alpha dx$  diverge (on a supposé  $\alpha \geq -1$ ), il en est de même de  $\int_0^{+\infty} f$ . On peut donc se concentrer sur le cas  $\alpha < -1$ . Séparons alors l'étude en 0 et celle en  $+\infty$ .

En 0. On a  $e^{\alpha x} \rightarrow 1$  et donc  $\ln(x + e^{\alpha x}) \rightarrow 0$ . Pour en savoir un peu plus, il faut faire un développement limité. Utilisant  $e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + o(x)$ , on trouve

$$f(x) = x^\alpha \ln(1 + (\alpha + 1)x + o(x)) = x^\alpha ((\alpha + 1)x + o(x)) = (\alpha + 1)x^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1}).$$

On en déduit que  $f \sim_0 (\alpha + 1)x^{\alpha+1}$  (remarquons que  $\alpha + 1 \neq 0$  puisque  $\alpha < -1$ ). Puisqu'on a affaire à des fonctions qui gardent un signe constant, on en déduit que  $\int_0^1 f$  converge si et seulement si  $\int_0^1 x^{\alpha+1} dx$  converge,

c'est-à-dire si et seulement si  $-\alpha - 1 < 1$  soit  $\alpha > -2$ . En  $+\infty$ . On fait un développement limité de  $\ln(x + e^{\alpha x})$ . Puisque  $\alpha < -1$ , on sait que  $e^{\alpha x}$  tend vers 0 en  $+\infty$ , d'où

$$\ln(x + e^{\alpha x}) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{e^{\alpha x}}{x}\right) = \ln(x) + o(1).$$

On en déduit que

$$f(x) \sim_{+\infty} x^{\alpha} \ln x.$$

On se ramène à une intégrale de Bertrand. Rappelons pourquoi dans le cas particulier de l'exercice elle est convergente. Puisque  $\alpha < -1$ , on peut choisir  $\gamma \in ]\alpha, -1[$ . Mais alors,

$$x^{\alpha} \ln x = o(x^{\gamma}) \text{ (faire le quotient des deux quantités)}$$

et comme  $\int_1^{+\infty} x^{\gamma} dx$  converge, il en est de même de  $\int_1^{+\infty} f$ .

En conclusion, on a prouvé que l'intégrale est convergente si et seulement si  $\alpha \in ]-2, -1[$ .

5. En 0. On a  $e^{\alpha x} \rightarrow 1$  et donc  $\ln(x + e^{\alpha x}) \rightarrow 0$ . Pour en savoir un peu plus, il faut faire un développement limité. Utilisant  $e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + o(x)$ , on trouve

$$f(x) = x^{\alpha} \ln(1 + (\alpha + 1)x + o(x)) = x^{\alpha}((\alpha + 1)x + o(x)) = (\alpha + 1)x^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1}).$$

On en déduit que  $f \sim_0 (\alpha + 1)x^{\alpha+1}$  (remarquons que  $\alpha + 1 \neq 0$  puisque  $\alpha < -1$ ). Puisqu'on a affaire à des fonctions qui gardent un signe constant, on en déduit que  $\int_0^1 f$  converge si et seulement si  $\int_0^1 x^{\alpha+1} dx$  converge, c'est-à-dire si et seulement si  $-\alpha - 1 < 1$  soit  $\alpha > -2$ .

6. En  $+\infty$ . On fait un développement limité de  $\ln(x + e^{\alpha x})$ . Puisque  $\alpha < -1$ , on sait que  $e^{\alpha x}$  tend vers 0 en  $+\infty$ , d'où

$$\ln(x + e^{\alpha x}) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{e^{\alpha x}}{x}\right) = \ln(x) + o(1).$$

On en déduit que

$$f(x) \sim_{+\infty} x^{\alpha} \ln x.$$

On se ramène à une intégrale de Bertrand. Rappelons pourquoi dans le cas particulier de l'exercice elle est convergente. Puisque  $\alpha < -1$ , on peut choisir  $\gamma \in ]\alpha, -1[$ . Mais alors,

$$x^{\alpha} \ln x = o(x^{\gamma}) \text{ (faire le quotient des deux quantités)}$$

et comme  $\int_1^{+\infty} x^{\gamma} dx$  converge, il en est de même de  $\int_1^{+\infty} f$ .

### Correction de l'exercice 6 ▲

1. La fonction  $\frac{1}{1-\sqrt{x}}$  est continue sur  $[0, 1[$ . Le problème de convergence de l'intégrale est donc en 1. Pour étudier ce problème, on fait un développement limité en 1 en posant  $x = 1 + u$ . Lorsque  $x$  tend vers 1,  $u$  tend vers 0. De plus,

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{x} &= 1 - \sqrt{1+u} \\ &= 1 - (1 + u/2 + o(u)) \\ &= -u/2 + o(u) \end{aligned}$$

et donc

$$1 - \sqrt{x} \sim_1 \frac{1-x}{2}.$$

La fonction est donc équivalente en 1 à  $\frac{2}{1-x}$ . Cette dernière fonction n'est pas intégrable (c'est une intégrale de Riemann divergente), on en déduit que  $\int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$  est divergente. On aurait aussi pu utiliser que, sur  $[0, 1[$ , on a

$$\frac{1}{1-\sqrt{x}} \geq \frac{1}{1-x}.$$

2. La fonction que l'on cherche à intégrer est continue sur  $]0, +\infty[$ . Il faut étudier le problème en  $+\infty$ . Puisque  $\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , il y a une forme indéterminée et le problème n'est pas trivial. On va faire un développement asymptotique de la fonction au voisinage de  $+\infty$ . Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{t}{t+1}\right) &= -\ln\left(\frac{t+1}{t}\right) \\ &= -\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\end{aligned}$$

On en déduit, en notant  $f$  la fonction, que, au voisinage de  $+\infty$ , on a

$$f(t) = 1 - 1 + \frac{1}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \implies f(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{2t}.$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann divergente,  $\int_1^{+\infty} f(t)dt$  est divergente. On n'a donc pas besoin d'étudier le problème de convergence en 0, mais on pourra remarquer que la fonction se prolonge par continuité en 0.

3. On factorise par le terme dominant dans la racine, puis on effectue un développement limité de  $(1+u)^\alpha$  :

$$(x^4 + x^2 + 1)^{1/2} = x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)^{1/2}.$$

On effectue le développement limité jusqu'aux termes en  $1/x^4$ . Posant

$$u = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}$$

on a

$$u^2 = \frac{1}{x^4} + o(1/x^4)$$

et donc

$$\begin{aligned}x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)^{1/2} &= x^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) - \frac{1}{8} \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \\ &= x^2 \left(1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \\ &= x^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).\end{aligned}$$

De même, on prouve que

$$x^3 \sqrt{x^3 + ax} = x^2 + \frac{a}{3} - \frac{a^2}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

En soustrayant les deux développements limités, et en notant  $f$  la fonction, on obtient que, au voisinage de  $+\infty$ , on a

$$f = \frac{1}{2} - \frac{a}{3} + \left(\frac{3}{8} + \frac{a^2}{9}\right) \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On distingue alors deux cas :

Si  $a \neq 3/2$ , alors la fonction est équivalente à  $\frac{1}{2} - \frac{a}{3}$ , et donc l'intégrale est divergente. Si  $a = 3/2$ , la fonction est équivalente à  $\frac{5}{8x^2}$ , et donc l'intégrale est convergente.

4. Si  $a \neq 3/2$ , alors la fonction est équivalente à  $\frac{1}{2} - \frac{a}{3}$ , et donc l'intégrale est divergente.

5. Si  $a = 3/2$ , la fonction est équivalente à  $\frac{5}{8x^2}$ , et donc l'intégrale est convergente.

6. La fonction  $f : t \mapsto e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right)$  est clairement continue sur  $]0, +\infty[$ . Pour étudier le problème en  $+\infty$ , il suffit de remarquer que

$$f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

au voisinage de  $+\infty$ , ce qui montre la convergence de  $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ . En 0, on fait un développement limité pour étudier le comportement. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} &= \frac{1}{t-t^2/2+o(t^2)} - \frac{1}{t} \\ &= \frac{1}{t} \left( \frac{1}{1-t/2+o(t)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{t} \left( 1 + \frac{t}{2} + o(t) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} + o(1). \end{aligned}$$

Ainsi,  $f$  se prolonge par continuité en 0 en posant  $f(0) = 1/2$ . Ceci achève de prouver la convergence de  $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ .

### Correction de l'exercice 7 ▲

1. Posons  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ . Alors les hypothèses nous disent que  $F$  admet une limite  $\ell$  en  $+\infty$ . Or,

$$\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt = F(y_n) - F(x_n) \rightarrow \ell - \ell = 0.$$

2. Posons  $x_n = (2n+1)\pi$  et  $y_n = (2n+2)\pi$ . Alors si  $t \in [x_n, y_n]$ , on a  $t \sin t \leq 0$  et donc  $e^{-t \sin t} \geq e^0 = 1$ . On en déduit que  $\int_{x_n}^{y_n} e^{-t \sin t} dt \geq \pi$ . En particulier, cette quantité ne tend pas vers zéro, et donc l'intégrale est divergente.

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. C'est classique. On intègre par parties, en intégrant le sinus et en dérivant  $1/t$  pour augmenter l'exposant au dénominateur. On obtient, pour  $X > 1$ ,

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{\sin t}{t} dt &= \left[ \frac{-\cos t}{t} \right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt \\ &= -\frac{\cos X}{X} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Lorsque  $X \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{\cos X}{X}$  tend vers 0. De plus, on a

$$\left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$$

et le terme à droite de l'inégalité est intégrable sur  $[1, +\infty[$ . En particulier,  $\int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt$  admet une limite lorsque  $X$  tend vers  $+\infty$ . On en conclut qu'il en est de même de  $\int_1^X \frac{\sin t}{t} dt$ . Le raisonnement pour le cosinus est tout à fait semblable.

2. Il suffit de remarquer que, puisque  $|\sin t| \leq 1$ , on a

$$|\sin t| \geq \sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}.$$

On en déduit, pour  $X \geq 1$ , que

$$\int_1^X \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \int_1^X \frac{1}{2t} dt - \int_1^X \frac{\cos 2t}{2t} dt.$$

Or, on sait que  $\int_1^X \frac{1}{2t} dt$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $X$  tend vers  $+\infty$  et que, d'après la question précédente,  $\int_1^X \frac{\cos 2t}{2t} dt$  admet une limite (finie) lorsque  $X$  tend vers  $+\infty$ . On en déduit que  $\int_1^X \frac{|\sin t|}{t} dt$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $X$  tend vers  $+\infty$ .

3. Pour  $t \in [k\pi, (k+1)\pi]$ , on a

$$\frac{1}{t} \geq \frac{1}{(k+1)\pi}.$$

Intégrant cette inégalité et utilisant la  $\pi$ -périodicité de  $|\sin t|$ , on en déduit que

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(k+1)\pi} dt = \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi |\sin t| dt.$$

En sommant ces intégrales pour  $k$  allant de 0 à  $n$ , et par la relation de Chasles, on trouve

$$\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)\pi} \right) \int_0^\pi |\sin t| dt.$$

Puisque la suite  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)\pi}$  diverge vers  $+\infty$  et que  $\int_0^\pi |\sin t| dt \neq 0$ , on en déduit que

$$\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \rightarrow +\infty.$$

Ceci reprouve la divergence de l'intégrale.

---

### Correction de l'exercice 9 ▲

1.  $F$  est une fonction continue sur  $[0, +\infty[$ . De plus, l'hypothèse de convergence de l'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-s_0 t} dt$  implique que  $F$  admet une limite en  $+\infty$ . On en tire que  $F$  est bornée sur  $[0, +\infty[$ .

2. Réalisons une intégration par parties en introduisant  $F$  et en écrivant

$$f(t)e^{-st} = f(t)e^{-s_0 t} e^{-(s-s_0)t}.$$

Pour  $X > 0$ , il vient

$$\int_0^X f(t)e^{-st} dt = F(X)e^{-(s-s_0)X} + (s-s_0) \int_0^X F(t)e^{-(s-s_0)t} dt.$$

Puisque  $F$  est bornée,

$$F(X)e^{-(s-s_0)X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0.$$

Toujours parce que  $F$  est bornée, on a

$$F(t)e^{-(s-s_0)t} =_{+\infty} O(e^{-(s-s_0)t}).$$

Or,  $-(s-s_0) < 0$  et donc la fonction  $e^{-(s-s_0)t}$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$ . Par comparaison, il en est de même de  $F(t)e^{-(s-s_0)t}$ . On en déduit que l'intégrale  $\int_0^X f(t)e^{-st} dt$  admet une limite finie quand  $X$  tend vers  $+\infty$ , ce qui signifie exactement que l'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$  converge.

3. On note cette fois  $G$  une primitive de  $g$ , qui est une fonction bornée. Par une intégration par parties, on trouve pour  $X > 1$

$$\int_1^X \frac{g(t)}{t} dt = \frac{G(X)}{X} - \frac{G(1)}{1} + \int_1^X \frac{G(t)}{t^2} dt.$$

On conclut exactement comme à la question précédente.

---

### Correction de l'exercice 10 ▲

On va, en utilisant les développements limités, décomposer les fonctions en somme de fonctions dont l'étude est plus simple.

1. On écrit

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} \right) \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left( 1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right) \right) \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + O(x^{-3/2}).\end{aligned}$$

Or, par une intégration par parties,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$  converge, et il en est de même de  $\int_1^{+\infty} O(x^{-3/2}) dx$ . L'intégrale  $\int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} dx$  est donc de même nature que  $\int_4^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ . Mais, en écrivant que

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x},$$

puis en utilisant (toujours par une intégration par parties) que  $\int_4^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}$  est convergente, et que  $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{2x}$  est divergente, on prouve que  $\int_4^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$  est divergente. Il en est de même de l'intégrale de départ. Remarquons que

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} \sim_{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}},$$

et que pourtant les deux intégrales ont des comportements opposés. L'hypothèse de positivité dans le théorème de comparaison n'est donc pas superflue !

2. Posons  $f(x) = \ln\left(1 + \frac{\sin x}{x^\alpha}\right)$ , puis effectuons un développement limité au voisinage de  $+\infty$ . On trouve

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha} - \frac{\sin^2 x}{2x^{2\alpha}} + o\left(\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}\right).$$

Posons  $g(x) = -\frac{\sin^2 x}{2x^{2\alpha}} + o\left(\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}\right)$ . Puisque  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$  converge (effectuer une intégration par parties), les intégrales  $\int_1^{+\infty} f$  et  $\int_1^{+\infty} g$  sont de même nature. Mais

$$g \sim_{+\infty} -\frac{\sin^2 x}{2x^{2\alpha}}$$

qui est une fonction négative. Donc  $\int_1^{+\infty} f$  est de même nature que  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}} dx$ . Utilisant la même méthode que pour la question précédente, on prouve que l'intégrale converge si  $\alpha > 1/2$  et diverge si  $\alpha \leq 1/2$ . En conclusion, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f$  converge si et seulement si  $\alpha > 1/2$ .

### Correction de l'exercice 11 ▲

1. On va montrer que la série de terme général  $u_n$  vérifie le critère des séries alternées. En effet

Si  $n = 2p$  est pair, alors  $\sin(t) \geq 0$  sur  $[2p\pi; 2p\pi + \pi]$  et donc  $u_{2p} \geq 0$ . Si  $n = 2p + 1$ , alors  $\sin(t)f(t) \leq 0$  sur  $[(2p+1)\pi, (2p+1)\pi + \pi]$  et donc  $u_{2p+1} \leq 0$ . Comme la fonction  $f(t)\sin(t)$  ne change pas de signe sur  $[n\pi, (n+1)\pi]$ , on remarque d'abord que

$$|u_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) |\sin(t)| dt.$$

D'autre part, pour tout  $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$ , puisque  $f$  est positive et décroissante, on a

$$0 \leq f((n+1)\pi) |\sin(t)| \leq f(t) |\sin(t)| \leq f(n\pi) |\sin(t)|$$

En intégrant, on obtient

$$f((n+1)\pi) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| dt \leq |u_n| \leq f(n\pi) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| dt.$$

L'intégrale de  $|\sin(t)|$  sur une période étant égale à 2, on obtient finalement :

$$2f((n+1)\pi) \leq |u_n| \leq 2f(n\pi).$$

Cette inégalité montre simultanément que la suite  $(|u_n|)$  est décroissante et tend vers 0.

Ainsi, d'après le critère des séries alternées, la série de terme général  $u_n$  est convergente.

2. Si  $n = 2p$  est pair, alors  $\sin(t) \geq 0$  sur  $[2p\pi; 2p\pi + \pi]$  et donc  $u_{2p} \geq 0$ . Si  $n = 2p + 1$ , alors  $\sin(t)f(t) \leq 0$  sur  $[(2p+1)\pi, (2p+1)\pi + \pi]$  et donc  $u_{2p+1} \leq 0$ .

3. Comme la fonction  $f(t)\sin(t)$  ne change pas de signe sur  $[n\pi, (n+1)\pi]$ , on remarque d'abord que

$$|u_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)|\sin(t)|dt.$$

D'autre part, pour tout  $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$ , puisque  $f$  est positive et décroissante, on a

$$0 \leq f((n+1)\pi)|\sin(t)| \leq f(t)|\sin(t)| \leq f(n\pi)|\sin(t)|$$

En intégrant, on obtient

$$f((n+1)\pi) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|dt \leq |u_n| \leq f(n\pi) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|dt.$$

L'intégrale de  $|\sin(t)|$  sur une période étant égale à 2, on obtient finalement :

$$2f((n+1)\pi) \leq |u_n| \leq 2f(n\pi).$$

Cette inégalité montre simultanément que la suite  $(|u_n|)$  est décroissante et tend vers 0.

4. Soit  $X > 0$ . Il existe un unique entier  $n := n(X)$  tel que  $X \in [n\pi, (n+1)\pi[$ . Notons  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ . On peut écrire

$$\int_0^X f(t)\sin(t)dt = S_{n-1} + \int_{n\pi}^X f(t)\sin(t)dt.$$

Or,

$$\left| \int_{n\pi}^X f(t)\sin(t)dt \right| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)|\sin(t)|dt \leq |u_n|.$$

Ainsi, lorsque  $X$  tend vers  $+\infty$ ,  $n$  tend également vers  $+\infty$ ,  $S_{n-1}$  admet une limite finie et  $\int_{n\pi}^X f(t)\sin(t)dt$  converge vers 0. C'est bien que l'intégrale est convergente. De plus,

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

En particulier, puisque  $(u_n)$  vérifie le critère spécial des séries alternées,  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est du signe de  $u_0$ , c'est-à-dire que

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin t dt \geq 0.$$

5. Si l'intégrale converge absolument, alors la série  $\sum_n u_n$  converge elle aussi absolument. Mais en utilisant l'inégalité obtenue dans la première question, on obtient

$$|u_n| \geq 2f((n+1)\pi) \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$$

si  $n$  est assez grand. Puisque la série de terme général  $1/n$  est divergente, il en est de même de  $\sum |u_n|$  : l'intégrale n'est pas absolument convergente.

### Correction de l'exercice 12 ▲

La fonction  $x \mapsto (\ln x)^n$  est continue sur  $]0, 1]$ . De plus, au voisinage de 0, on a

$$(\ln x)^n = o(1/\sqrt{x}).$$

Par comparaison avec une intégrale de Riemann, l'intégrale est convergente en 0. On va obtenir une formule de récurrence pour exprimer  $I_n$  en fonction de  $I_{n-1}$  en réalisant une intégration par parties. Pour cela, prenons  $a \in ]0, 1[$ . On a :

$$\begin{aligned}\int_a^1 (\ln x)^n dx &= [x(\ln x)^n]_a^1 - n \int_a^1 \frac{x(\ln x)^{n-1}}{x} dx \\ &= -a(\ln a)^n - n \int_a^1 (\ln x)^{n-1} dx.\end{aligned}$$

On fait tendre  $a$  vers 0 et on obtient, puisque  $a(\ln a)^n \rightarrow 0$  lorsque  $a \rightarrow 0$ ,

$$I_n = -n \int_0^1 (\ln x)^{n-1} dx = -n I_{n-1}.$$

Par récurrence, on prouve alors facilement que

$$I_n = (-1)^n n! I_0.$$

Or,  $I_0 = 1$ , et donc  $I_n = (-1)^n n!$ .

---

### Correction de l'exercice 13 ▲

1. On va justifier, pour tout  $a > 0$ , la convergence de  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt$ . On n'utilise dans cette question que le cas  $a = 1$ , mais le cas général sera utile pour la question suivante. D'abord, la fonction  $t \mapsto \frac{\ln t}{a^2 + t^2}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . Au voisinage de 0, on a l'équivalence

$$\frac{\ln t}{a^2 + t^2} \sim_0 \frac{\ln t}{a^2}$$

et on sait que  $\ln t$  est intégrable en 0. De même, au voisinage de  $+\infty$ , on a

$$\frac{\ln t}{a^2 + t^2} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$

On en déduit la convergence de  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt$ . Le changement de variables  $u = 1/t$  (valide car toutes les intégrales mises en jeu convergent) donne ensuite

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1 + t^2} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{-\ln u - 1}{1 + \frac{1}{u^2}} \frac{1}{u^2} du = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1 + u^2} du.$$

On en déduit que  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1 + t^2} dt = 0$ .

2. Pour calculer cette intégrale, on fait le changement de variables  $t = au$ . On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln au}{a^2 + a^2 u^2} a du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln a}{a(1 + u^2)} du + \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{a(1 + u^2)} du.\end{aligned}$$

Utilisant le calcul précédent et le fait qu'une primitive de  $\frac{1}{1+u^2}$  est  $\arctan u$ , on trouve finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$


---

### Correction de l'exercice 14 ▲

1. Soit  $M > 0$  tel que  $|f(t)| \leq M$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . La fonction  $x \mapsto \frac{f(x)}{1+x^2}$  est alors continue sur  $[0, +\infty[$ , et elle vérifie  $|\frac{f(x)}{1+x^2}| \leq \frac{M}{1+x^2}$  qui est intégrable au voisinage de  $+\infty$ . Ainsi, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$  converge. De



même,  $x \mapsto \frac{f(1/x)}{1+x^2}$  est alors continue sur  $]0, +\infty[$  (attention, on n'a plus obligatoirement continuité en 0). Le problème en  $+\infty$  se traite exactement comme précédemment, et en 0, il suffit d'observer que

$$\frac{|f(1/x)|}{1+x^2} \leq M,$$

et comme les fonctions constantes sont intégrables au voisinage de tout point, on a aussi prouvé la convergence de l'intégrale au voisinage de 0.

2. Effectuons le changement de variables  $u = 1/x$ . On trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{f(1/u) - 1}{1 + \frac{1}{u^2}} \frac{1}{u^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2} dx.$$

3. On applique le résultat des questions précédentes avec  $f(x) = \frac{1}{1+x^n}$  (qui est bien continue et bornée sur  $[0, +\infty[$ ). On trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)} = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx := A.$$

Mais si on effectue la somme de ces deux intégrales, on trouve :

$$2A = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ces deux intégrales sont donc égales à  $\frac{\pi}{4}$ .

### Correction de l'exercice 15 ▲

1. La fonction  $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2-1}$  est continue sur l'intervalle  $]0, 1[$ . En 1, on a

$$\frac{\ln t}{t^2-1} \sim_1 \frac{t-1}{(t-1)(t+1)} \sim_1 \frac{1}{t+1} \sim_1 \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la fonction se prolonge par continuité en 1 par la valeur 1/2, et il n'y a pas de problème de convergence en 1. En 0, on a

$$\frac{\ln t}{t^2-1} \sim_0 (-\ln t).$$

Or,  $-(\ln t)$  est intégrable au voisinage de 0. Par les théorèmes de comparaison, l'intégrale impropre  $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt$  est convergente.

2. La convergence pour  $k = 0$  est classique (par exemple, car  $\ln t = o(1/\sqrt{t})$  en 0). Pour  $k \geq 1$ , la fonction  $t \mapsto t^k(\ln t)$  se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0, et il n'y a pas de problèmes de convergence. Pour calculer cette intégrale, on peut effectuer une intégration par parties.

$$\begin{aligned} I_k &= \left[ \frac{1}{k+1} t^{k+1} (\ln t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^k}{k+1} dt \\ &= -\frac{1}{(k+1)^2}. \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} &= - \sum_{k=0}^n I_{2k} \\ &= - \sum_{k=0}^n \int_0^1 t^{2k} \ln t dt \\ &= - \int_0^1 \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2} \ln t dt, \end{aligned}$$

ce qui est la relation demandée.

4. En 0,  $t^2 \ln t$  tend vers 0, et donc la fonction  $t \mapsto \frac{t^2 \ln t}{t^2 - 1}$  tend vers 0. En 1, en raisonnant comme à la première question, on trouve que  $\frac{t^2 \ln t}{t^2 - 1}$  tend vers  $1/2$ . Ainsi, la fonction  $t \mapsto \frac{t^2 \ln t}{t^2 - 1}$  se prolonge par continuité au segment  $[0, 1]$ . Comme toute fonction continue sur un segment, elle y est bornée par une constante  $M > 0$ . En particulier, pour tout  $t \in ]0, 1[$ , on a

$$\left| \frac{t^2 \ln t}{t^2 - 1} \right| \leq M.$$

5. Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{t^{2n+2} \ln t}{t^2 - 1} dt \right| &\leq \int_0^1 t^{2n} \left| \frac{t^2 \ln t}{t^2 - 1} \right| dt \\ &\leq M \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{M}{2n+1}. \end{aligned}$$

La relation demandée suit alors immédiatement d'un passage à la limite dans la question 3.

---

### Correction de l'exercice 16 ▲

1. Par l'inégalité des accroissements finis, et puisque la dérivée de  $\arctan$  est une fonction décroissante sur  $[0, +\infty[$ , on sait que, pour tout  $x \geq 0$ , on a

$$|\arctan(x+1) - \arctan(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} \times (x+1-x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann (convergente), la fonction  $x \mapsto \arctan(x+1) - \arctan(x)$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

2. Soit  $\varepsilon > 0$ . La fonction  $\arctan$  croît vers  $\pi/2$  en  $+\infty$ . Il existe donc un réel  $A$  tel que, pour tout  $x \geq A$ , on a

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \arctan x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Mais alors, pour  $X \geq A$ , en intégrant cette dernière inégalité entre  $X$  et  $X+1$ , on a

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \int_X^{X+1} \arctan(x) dx \leq \frac{\pi}{2}$$

ce qui prouve bien ce que nous voulions démontrer. Une autre méthode est de remarquer que, puisque la fonction  $\arctan$  est croissante, pour tout  $x \in [X, X+1]$ , on a

$$\arctan X \leq \arctan x \leq \arctan(X+1).$$

Par intégration, on a

$$\arctan X \leq \int_X^{X+1} \arctan(x) dx \leq \arctan(X+1).$$

Mais  $\arctan(X) \rightarrow \pi/2$  et  $\arctan(X+1) \rightarrow \pi/2$  lorsque  $X \rightarrow +\infty$ . Par le théorème des gendarmes, on en déduit que  $\int_X^{X+1} \arctan(x) dx$  tend vers  $\pi/2$  également.

3. Calculons cette intégrale par intégration par parties. En effet,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan(x) dx &= [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2). \end{aligned}$$

4. Posons, pour  $X > 0$ ,  $F(X) = \int_0^X (\arctan(x+1) - \arctan(x)) dx$ . Alors

$$\begin{aligned} F(X) &= \int_0^X \arctan(x+1) dx - \int_0^X \arctan(x) dx \\ &= \int_1^{X+1} \arctan(x) dx - \int_0^X \arctan(x) dx \\ &= \int_X^{X+1} \arctan(x) dx - \int_0^1 \arctan(x) dx. \end{aligned}$$

D'après les questions précédentes, en faisant tendre  $X$  vers  $+\infty$ , on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x)) dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

### Correction de l'exercice 17 ▲

1. Au voisinage de 0, la fonction à intégrer est équivalente à  $\ln t$ , qui est une fonction intégrable en 0. Au voisinage de 1, on a

$$\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} \sim_1 \frac{t-1}{\sqrt{1-t}} = -\sqrt{1-t}.$$

La fonction se prolonge donc par continuité en 1, ce qui achève de prouver la convergence de l'intégrale entre 0 et 1. Pour calculer sa valeur, on réalise le changement de variables  $u = \sqrt{1-t}$ . On trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt &= 2 \int_0^1 \ln(1-u^2) du \\ &= 2 \int_0^1 \ln(1-u) du + 2 \int_0^1 \ln(1+u) du \\ &= 2 \int_0^1 \ln(x) dx + 2 \int_1^2 \ln(x) dx \\ &= 2 \int_0^2 \ln(x) dx \\ &= 2 [x \ln x - x]_0^2 \\ &= 4 \ln 2 - 4. \end{aligned}$$

2. Pour la convergence de l'intégrale, il suffit de remarquer que la fonction est continue sur  $[0, +\infty[$  et qu'au voisinage de  $+\infty$ , elle est dominée par  $\frac{1}{t^2}$ . En effet, on a

$$t^2 \times t e^{-\sqrt{t}} = t^3 e^{-\sqrt{t}} = e^{3 \ln t - \sqrt{t}} \rightarrow 0 \text{ en } +\infty.$$

Pour le calcul de l'intégrale, on commence par effectuer le changement de variables  $u = \sqrt{t}$ . On obtient :

$$\int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} du.$$

On effectue ensuite des intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt &= 2 [-u^3 e^{-u}]_0^{+\infty} + 6 \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du \\ &= 6 [-u^2 e^{-u}]_0^{+\infty} + 12 \int_0^{+\infty} u e^{-u} du \\ &= 12 [-u e^{-u}]_0^{+\infty} + 12 \int_0^{+\infty} e^{-u} du \\ &= 12. \end{aligned}$$

3. On remarque d'abord que  $|\sin(t)e^{-at}| \leq e^{-at}$  qui est une fonction intégrable sur  $[0, +\infty[$  (car  $a > 0$ ) et donc la fonction  $t \mapsto \sin(t)e^{-at}$  est elle-même intégrable. Pour calculer l'intégrale, il suffit d'écrire que  $\sin t$  est la partie imaginaire de  $e^{it}$ ... Il vient

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-at} dt &= \Im \left( \int_0^{+\infty} e^{(i-a)t} dt \right) \\ &= \Im \left( \left[ \frac{1}{i-a} e^{(i-a)t} \right]_0^{+\infty} \right) \\ &= \Im \left( \frac{1}{a-i} \right) \\ &= \frac{1}{a^2+1}. \end{aligned}$$

---

### Correction de l'exercice 18 ▲

---

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}$  est continue sur  $]0, \pi/2]$ . Elle se prolonge par continuité en 0 par la valeur  $2n+1$ . Ainsi, il n'y a pas de problèmes de convergence en 0. Le raisonnement est identique pour la fonction  $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{t}$ .

2. Il suffit de remarquer que  $I_0 = \frac{\pi}{2}$  et que, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a grâce à une formule de trigonométrie

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} 2 \cos(2nt) dt = 0.$$

3. Ceci résulte d'une intégration par parties. En effet,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \phi(t) \sin((2n+1)t) dt &= -\frac{1}{2n+1} \left( \phi(\pi/2) \cos((2n+1)\pi/2) - \phi(0) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\pi/2} \phi'(t) \cos((2n+1)t) dt \right) \end{aligned}$$

Puisque

$$\left| \int_0^{\pi/2} \phi'(t) \cos((2n+1)t) dt \right| \leq \int_0^{\pi/2} |\phi'(t)| dt,$$

on en déduit bien la convergence vers zéro souhaitée.

4. Il est facile de voir que  $\phi(t) \sim_0 -\frac{t}{6}$ , ce qui prouve que  $\phi$  se prolonge par continuité en 0. De plus, on a

$$\phi'(t) = \frac{t^2 \cos t - \sin^2 t}{t^2 \sin^2 t}.$$

Pour  $t$  tendant vers 0, l'utilisation des développements limités prouve facilement que  $\phi'(t)$  tend vers  $-1/6$ . Par le théorème de prolongement d'une dérivée, ceci prouve que  $\phi$  définit une fonction  $C^1$  sur  $[0, \pi/2]$ .

5. On a

$$I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \phi(t) \sin((2n+1)t) dt,$$

avec  $\phi(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ . D'après les deux questions précédentes, on a bien  $I_n - J_n \rightarrow 0$ .

6. Ceci vient du changement de variables  $u = (2n+1)t$  :

$$J_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt \rightarrow I.$$

7. On a  $I = \lim_n J_n = \lim_n I_n = I_0 = \frac{\pi}{2}$ .

---

### Correction de l'exercice 19 ▲

---

1. Posons, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = e^{-x} Q(x) \text{ et } g(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} P(t) dt.$$

Remarquons que  $g$  est bien définie puisque  $t \mapsto e^{-t} P(t)$  est continue sur  $[x, +\infty[$  et est négligeable devant  $1/t^2$  au voisinage de l'infini. D'autre part,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = e^{-x} (-Q(x) + Q'(x)) = -e^{-x} P(x).$$

D'autre part,  $g$  est également dérivable sur  $\mathbb{R}$  (on peut écrire  $\int_x^{+\infty}$  sous la forme  $\int_x^0 + \int_0^{+\infty}$ ) et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$g'(x) = -e^{-x} P(x).$$

Ainsi, il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = g(x) + C$ . Mais comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0,$$

on en déduit que  $C = 0$ . Multipliant par  $e^x$ , on trouve le résultat voulu.

2. C'est une conséquence immédiate du résultat précédent et du fait que l'intégration conserve le signe.

---

### Correction de l'exercice 20 ▲

1. D'après le développement limité de la fonction  $\sin$ , on sait qu'il existe une fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , bornée sur un intervalle  $[0, a]$  avec  $a > 0$ , telle que pour tout  $t \in [0, a]$ ,  $\sin(t) = t + t^2 g(t)$ . On en déduit que, pour  $0 < x < 3a$ ,

$$\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = \int_x^{3x} \frac{dt}{t} + \int_x^{3x} g(t) dt.$$

Or,

$$\int_x^{3x} \frac{dt}{t} = \ln(3x) - \ln(x) = \ln(3)$$

tandis que, si on note  $M > 0$  tel que  $|g(t)| \leq M$  pour  $t \in [0, a]$ , on a pour  $0 < x < 3a$ ,

$$\left| \int_x^{3x} g(t) dt \right| \leq \int_x^{3x} M dt = 2Mx \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = \ln(3).$$

2. La fonction  $t \mapsto \frac{\sin^3(t)}{t^2}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . De plus,  $\sin(t) \sim_0 t$  et donc  $\frac{\sin^3(t)}{t^2} \sim_0 t$ . En particulier, la fonction  $t \mapsto \frac{\sin^3(t)}{t^2}$  se prolonge par continuité en 0, et il n'y a pas de problème d'intégrabilité au voisinage de ce point. Enfin, au voisinage de  $+\infty$ , on a

$$\left| \frac{\sin^3(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}.$$

Puisque  $t \mapsto 1/t^2$  est intégrable en  $+\infty$ , on en déduit qu'il en est de même de notre fonction, par majoration.

3. On rappelle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \sin^3(t) &= \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 \\ &= -\frac{e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}}{8i} \\ &= \frac{3}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \sin(3t). \end{aligned}$$

Soit maintenant  $0 < x < y$ . On a donc

$$\begin{aligned} \int_x^y \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt &= \frac{3}{4} \int_x^y \frac{\sin(t)}{t^2} dt - \frac{1}{4} \int_x^y \frac{\sin(3t)}{t^2} dt \\ &= \frac{3}{4} \int_x^y \frac{\sin(t)}{t^2} dt - \frac{3}{4} \int_{3x}^{3y} \frac{\sin(u)}{u^2} du \end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variables  $u = 3t$  dans la dernière intégrale. Utilisant à nouveau  $t$  comme nom de variables d'intégration, puis la relation de Chasles, on trouve

$$\begin{aligned} \int_x^y \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt &= \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt + \frac{3}{4} \int_{3x}^{3y} \frac{\sin(t)}{t^2} dt + \frac{3}{4} \int_{3y}^y \frac{\sin(t)}{t^2} dt - \frac{3}{4} \int_{3x}^{3y} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \\ &= \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt - \frac{3}{4} \int_y^{3y} \frac{\sin(t)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\left| \int_y^{3y} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \right| \leq \int_y^{3y} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{3y}.$$

On en déduit que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_y^{3y} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = 0$$

et donc que

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

En faisant tendre  $x$  vers  $0^+$  et en utilisant le résultat de la première question, on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt = \frac{3 \ln(3)}{4}.$$

---

### Correction de l'exercice 21 ▲

Introduisons  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . L'hypothèse d'intégrabilité entraîne que  $F$  admet une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ . Mais par la relation de Chasles, on a

$$\int_x^{x+1} f(t) dt = F(x+1) - F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell - \ell = 0.$$

---

### Correction de l'exercice 22 ▲

On peut réécrire l'inégalité en  $0 \leq g - f \leq h - f$ . Or,  $h - f$  est intégrable sur  $I$  comme différence de fonctions intégrables. Par majoration et positivité,  $g - f$  est intégrable sur  $I$ . Écrivant  $g = (g - f) + f$ , on trouve que  $g$  est intégrable sur  $I$ .

---

### Correction de l'exercice 23 ▲

On sait que  $f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0)$ . Puisque  $f'$  est intégrable,  $f$  admet une limite  $\ell \in \mathbb{R}$  en l'infini. Mais cette limite ne peut être que nulle. En effet, si  $\ell \neq 0$ , alors  $f \sim_{+\infty} \ell$  et la fonction constante égale à  $\ell$  n'est pas intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Par comparaison,  $f$  ne serait pas intégrable, ce qui est contraire aux hypothèses. Donc on a prouvé que  $f$  tend vers 0 en  $+\infty$ .

---

### Correction de l'exercice 24 ▲

1. Supposons que cela ne soit pas le cas. Alors, il existe  $A > 0$  et  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $x \geq A$ ,  $|xf(x)| \geq \varepsilon$  ce qui entraîne

$$|f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{x}.$$

Ceci contredit le fait que  $f$  est intégrable.

2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , appliquons le résultat de la question précédente avec  $A = n$  et  $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ . On obtient un réel  $x_n$  tel que  $x_n \geq n$  et  $|x_n f(x_n)| \leq 1/(n+1)$ . La suite  $(x_n)$  vérifie donc bien les conditions imposées.

---

### Correction de l'exercice 25 ▲

1. Si  $f$  n'est pas positive, il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x_0) < 0$ . Mais alors, pour  $x \geq x_0$ , on a  $f(x) \leq f(x_0)$  puisque  $f$  est décroissante. Soit  $X > x_0$ . Alors en intégrant l'inégalité précédente entre  $x_0$  et  $X$ , on trouve

$$\int_{x_0}^X f(x) dx \leq \int_{x_0}^X f(x_0) dx \leq (X - x_0) f(x_0).$$

Or, si  $X$  tend vers  $+\infty$ , le membre de droite de l'inégalité tend vers  $-\infty$ . Ceci contredit la convergence de  $\int_{x_0}^{+\infty} f(x) dx$ .

2. Imaginons que  $f$  ne converge pas vers 0. Alors puisque  $f$  est décroissante et positive, elle admet une limite  $a > 0$  en  $+\infty$  et  $f(x) \geq a$  pour tout  $x \geq 0$ . On en déduit que  $\int_0^X f(t)dt \geq aX$  et cette dernière quantité tend vers  $+\infty$  si  $X$  tend vers  $+\infty$ . Ceci contredit la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ .

3. Posons  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ . Cette fonction admet une limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . De plus,

$$\int_{x/2}^x f(t)dt = F(x) - F(x/2)$$

et ceci tend vers 0 si  $x$  tend vers  $+\infty$ .

4. On écrit que, puisque  $f$  est décroissante et positive,

$$\int_{x/2}^x f(t)dt \geq \int_{x/2}^x f(x)dt \geq \frac{xf(x)}{2} \geq 0.$$

Par le théorème des gendarmes,  $xf(x)$  tend vers 0 si  $x$  tend vers  $+\infty$ .

### Correction de l'exercice 26 ▲

1. Si  $f$  admet pour limite  $\ell \neq 0$  en  $+\infty$ , alors  $f \sim_{+\infty} \ell$ . Mais  $\int_a^{+\infty} \ell dt$  diverge. Par critère d'équivalence,  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  diverge, une contradiction.

2. Si  $f$  ne tend pas vers 0 en  $+\infty$ , il existe  $\varepsilon > 0$  et une suite  $(x_n)$  qui converge vers  $+\infty$  telle que  $|f(x_n)| \geq \varepsilon$ . Par uniforme continuité, il existe  $\eta > 0$  (indépendant de  $n$ ) tel si  $|x - y| \leq \eta$ , alors  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$ . Mais alors, pour  $x \in [x_n - \eta, x_n + \eta]$ , on a  $|f(x)| \geq |f(x_n)| - \varepsilon/2 \geq \varepsilon/2$ . On en déduit donc que

$$\int_{x_n - \eta}^{x_n + \eta} |f| \geq 2\eta \frac{\varepsilon}{2} = \eta\varepsilon.$$

Mais, posons  $F(x) = \int_a^x |f(t)|dt$ . Puisque la fonction est intégrable,  $F$  admet une limite finie en  $+\infty$ . Mais alors

$$\int_{x_n - \eta}^{x_n + \eta} |f| = F(x_n + \eta) - F(x_n - \eta) \rightarrow 0$$

ce qui contredit l'inégalité précédente.

3. Non ! Voici un contre-exemple. Soit  $f$  la fonction affine par morceaux telle que  $f(x) = 2^n(x - n)$  pour  $x$  dans  $[n, n + 1/2^n]$ ,  $f(x) = 1 - 2^n(x - n - 1/2^n)$  pour  $x$  dans  $[n + 1/2^n, n + 2/2^n]$ ,  $f(x) = 0$  ailleurs. La fonction  $f$  est donc souvent nulle, mais elle fait un pic entre  $n$  et  $n + 2/2^n$  avec une valeur maximale égale à 1 en  $n + 1/2^n$  (faire impérativement un dessin !).  $f$  ne tend donc pas vers 0 en  $+\infty$ . Mais on a

$$\int_n^{n+2/2^n} f = 1 \times \frac{2}{2^n} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

$f$  est donc intégrable sur  $[0, +\infty[$  car elle est positive et que

$$\int_0^{+\infty} f = \sum_{n \geq 0} \int_n^{n+2/2^n} f = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} = 2.$$

### Correction de l'exercice 27 ▲

1. Puisque  $f$  est croissante, on sait que, pour tout  $k = 1, \dots, n - 1$ ,

$$\int_{a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}}^{a + \frac{k(b-a)}{n}} f(t)dt \leq \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \leq \int_{a + \frac{k(b-a)}{n}}^{a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}} f(t)dt.$$

L'inégalité de droite reste encore valable si  $k = 0$ . Sommant alors pour  $k$  de 0 à  $n - 1$ , on trouve

$$\frac{b-a}{n} f(a) + \int_a^{b - \frac{b-a}{n}} f(t)dt \leq S_n \leq \int_a^b f(t)dt.$$

Si  $\int_a^b f(t)dt$  converge, on fait tendre  $n$  vers  $+\infty$ , et par le théorème d'encadrement des limites,  $(S_n)$  converge vers  $\int_a^b f(t)dt$ .

2. Si  $\int_a^b f(t)dt$  diverge, l'inégalité de gauche obtenue à la question précédente (qui ne fait appel qu'à des intégrales de fonctions continues sur un segment) reste valable. De plus, puisque  $f$  est positive, si  $\int_a^b f(t)dt$  diverge, ceci signifie que  $\int_a^X f(t)dt$  tend vers  $+\infty$  si  $X$  tend vers  $b$ . Passant à la limite dans l'inégalité obtenue, on obtient bien que  $(S_n)$  tend vers  $+\infty$ .

---

### Correction de l'exercice 28 ▲

1. Écrivons  $f = f \times 1$  et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \left( \int_a^b 1^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_a^b f^2(t)dt \right)^{1/2} = (b-a)^{1/2} \left( \int_a^b f^2(t)dt \right)^{1/2}.$$

2. Fixons  $\varepsilon > 0$  et  $A > 0$  tel que, pour tout  $x \geq A$ , on a  $\int_A^x f^2(t)dt \leq \varepsilon^2$  (on regarde ici le reste d'une intégrale convergente qui tend vers 0). On coupe l'intégrale en  $A$ , et on écrit donc, pour  $x \geq A$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^A f(t)dt + \frac{1}{\sqrt{x}} \int_A^x f(t)dt.$$

Le premier terme apparaissant à droite tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  (rappelons que  $A$  est fixé). On en déduit qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que, pour  $x \geq x_0$ , on a

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^A f(t)dt \right| \leq \varepsilon.$$

Pour le second terme, on utilise le résultat de la première question :

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \int_A^x f(t)dt \right| \leq \frac{\sqrt{x-A}}{\sqrt{x}} \left( \int_A^x f^2(t)dt \right)^{1/2} \leq 1 \times \varepsilon \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour  $x \geq x_0$ , on a

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)dt \right| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci donne le résultat.

---

### Correction de l'exercice 29 ▲

D'après la définition de la limite, et puisque  $a < 0$ , il existe  $A > 0$  tel que, pour tout  $x \geq A$ , on a

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \leq \frac{a}{2}.$$

Intégrons cette inégalité. Puisque  $f$  est positive, on trouve

$$\ln f(x) - \ln f(A) \leq \frac{a}{2}(x-A).$$

Passant à l'exponentielle, on en déduit, pour  $x \geq A$ ,

$$0 \leq f(x) \leq f(A)e^{\frac{a}{2}(x-A)}.$$

Puisque  $a/2 < 0$ , la fonction  $e^{\frac{a}{2}x}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ . Il en est de même de  $f$ . De plus, l'inégalité précédente prouve que  $f$  tend vers 0 en  $+\infty$ . D'autre part, puisque  $f$  est positive, on déduit de la définition de  $A$  que  $f'(x) \leq 0$  pour  $x \geq A$ . Ainsi, pour  $x \geq A$ ,

$$\int_A^X |f'(t)|dt = - \int_A^X f'(t)dt = f(A) - f(X)$$

et ceci converge vers  $f(A)$  quand  $X$  tend vers  $+\infty$ .  $f'$  est donc elle aussi intégrable.



---

**Correction de l'exercice 30 ▲**

---

1. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $x_0 \in [a, b[$  tel que, pour tout  $t \in ]x_0, b[$ , on a  $|g(t)| \leq \varepsilon f(t)$ . Soit  $x \in ]x_0, b[$ . Si on intègre l'inégalité précédente, on obtient

$$\left| \int_x^b g(t) dt \right| \leq \int_x^b |g(t)| dt \leq \varepsilon \int_x^b f(t) dt.$$

Ceci prouve le résultat demandé. C'est un peu plus difficile car il faut découper l'intégrale en deux. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $x_0 \in [a, b[$  tel que, pour tout  $t \in ]x_0, b[$ , on a  $|g(t)| \leq \varepsilon f(t)$ . Soit  $x \in ]x_0, b[$ . On écrit

$$\left| \int_a^x g(t) dt \right| \leq \int_a^x |g(t)| dt = \int_a^{x_0} |g(t)| dt + \int_{x_0}^x |g(t)| dt \leq \int_a^{x_0} |g(t)| dt + \varepsilon \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Puisque  $\int_a^{x_0} |g(t)| dt$  est un réel fixé et que  $\int_a^x f(t) dt$  tend vers  $+\infty$  si  $x$  tend vers  $b$ , alors il existe  $x_1 \in ]x_0, b[$  tel que, pour tout  $x \in ]x_1, b[$ , on a

$$\int_a^{x_0} |g(t)| dt \leq \varepsilon \int_a^x f(t) dt.$$

Si l'on résume, on obtient que pour tout  $x \in ]x_1, b[$ , on a

$$\left| \int_a^x g(t) dt \right| \leq 2\varepsilon \int_a^x f(t) dt$$

ce qui prouve le résultat.

2. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $x_0 \in [a, b[$  tel que, pour tout  $t \in ]x_0, b[$ , on a  $|g(t)| \leq \varepsilon f(t)$ . Soit  $x \in ]x_0, b[$ . Si on intègre l'inégalité précédente, on obtient

$$\left| \int_x^b g(t) dt \right| \leq \int_x^b |g(t)| dt \leq \varepsilon \int_x^b f(t) dt.$$

Ceci prouve le résultat demandé.

3. C'est un peu plus difficile car il faut découper l'intégrale en deux. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $x_0 \in [a, b[$  tel que, pour tout  $t \in ]x_0, b[$ , on a  $|g(t)| \leq \varepsilon f(t)$ . Soit  $x \in ]x_0, b[$ . On écrit

$$\left| \int_a^x g(t) dt \right| \leq \int_a^x |g(t)| dt = \int_a^{x_0} |g(t)| dt + \int_{x_0}^x |g(t)| dt \leq \int_a^{x_0} |g(t)| dt + \varepsilon \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Puisque  $\int_a^{x_0} |g(t)| dt$  est un réel fixé et que  $\int_a^x f(t) dt$  tend vers  $+\infty$  si  $x$  tend vers  $b$ , alors il existe  $x_1 \in ]x_0, b[$  tel que, pour tout  $x \in ]x_1, b[$ , on a

$$\int_a^{x_0} |g(t)| dt \leq \varepsilon \int_a^x f(t) dt.$$

Si l'on résume, on obtient que pour tout  $x \in ]x_1, b[$ , on a

$$\left| \int_a^x g(t) dt \right| \leq 2\varepsilon \int_a^x f(t) dt$$

ce qui prouve le résultat.

4. Pour ces deux questions, on peut reproduire la preuve des questions précédentes. On peut aussi remarquer que  $g \sim_b f$  si et seulement si  $f - g =_b o(f)$ . On peut appliquer alors le résultat des questions précédentes pour démontrer, par exemple dans le premier cas, que

$$\int_x^b g(t) dt = \int_x^b f(t) dt + o\left(\int_x^b f(t) dt\right)$$

ce qui signifie bien que

$$\int_x^b g(t) dt \sim_b \int_x^b f(t) dt.$$

5. Au voisinage de  $+\infty$ ,  $\frac{\arctan t}{t} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2t}$ . Comme  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t} dt$  diverge, on en déduit d'après le résultat de la question précédente que

$$\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt \sim_{+\infty} \int_1^x \frac{\pi}{2t} dt.$$

Puisque cette dernière intégrale se calcule aisément, on conclut que

$$\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2} \ln x.$$

### Correction de l'exercice 31 ▲

Au voisinage de  $+\infty$ ,  $\frac{\arctan t}{t} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2t}$ , qui est une fonction positive et dont l'intégrale diverge au voisinage de  $+\infty$ . D'après le théorème d'intégration des relations de comparaison, on déduit que

$$\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt \sim_{+\infty} \int_1^x \frac{\pi}{2t} dt.$$

Puisque cette dernière intégrale se calcule aisément, on conclut que

$$\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2} \ln x.$$

### Correction de l'exercice 32 ▲

1. La fonction  $t \mapsto e^{-t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . De plus,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$  et donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergente,  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$  converge.

2. Il suffit d'intégrer par parties en écrivant que

$$e^{-t^2} = \frac{-1}{2t} \times (-2te^{-t^2}),$$

et en intégrant  $-2te^{-t^2}$ .

3. On sait que

$$\frac{e^{-t^2}}{2t^2} =_{+\infty} o\left(e^{-t^2}\right).$$

Par intégration des relations de comparaison (les fonctions étant positives et intégrables), on en déduit que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} =_{+\infty} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt\right).$$

On en déduit, en reprenant le résultat de la deuxième question, que

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \sim_{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

Remarquons que même si l'on ne connaît pas le théorème d'intégration des relations de comparaison, il est très facile de prouver que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} =_{x \rightarrow +\infty} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt\right).$$

En effet, pour tout  $t \geq x$ , on a

$$0 \leq \frac{e^{-t^2}}{2t^2} \leq \frac{e^{-t^2}}{2x^2}$$

d'où l'on tire que

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt \leq \frac{1}{2x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

ce qui montre immédiatement le résultat voulu puisque  $1/2x^2$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

---

### Correction de l'exercice 33 ▲

On remarque d'abord que  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  converge : en effet, la fonction  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$  est continue et positive sur  $[1, +\infty[$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \frac{e^{-t}}{t} = 0$ . On intègre ensuite par parties, en intégrant  $t \mapsto e^{-t}$  et en dérivant  $t \mapsto \frac{1}{t}$ . On obtient, pour  $x > 1$ ,

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt &= \left[ -\frac{e^{-t}}{t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \\ &= \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Or, au voisinage de  $+\infty$ ,

$$\frac{e^{-t}}{t^2} =_{+\infty} o\left(\frac{e^{-t}}{t}\right).$$

Par intégration des relations de comparaison (les fonctions sont positives et intégrables), on trouve

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt =_{+\infty} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt\right).$$

On en déduit que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \sim_{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}.$$

---

### Correction de l'exercice 34 ▲

On intègre par parties, deux fois, en intégrant à chaque fois la fonction  $e^t$  et en dérivant  $1/t$ , puis  $1/t^2$ . On trouve successivement :

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{e^t}{t} dt &= \left[ \frac{e^t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt \\ &= \frac{e^x}{x} - \frac{e}{1} + \left[ \frac{e^t}{t^2} \right]_1^x + 2 \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt \\ &= \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt. \end{aligned}$$

Il faut maintenant prendre soin à la rédaction. On va commencer par chercher un équivalent de  $\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt$ . Toujours par intégration par parties,

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt = \frac{e^x}{x^3} - e + 3 \int_1^x \frac{e^t}{t^4} dt.$$

Or, au voisinage de  $+\infty$ , on a

$$\frac{e^t}{t^4} = o_{+\infty}\left(\frac{e^t}{t^3}\right).$$

Par intégration des relations de comparaison (les fonctions sont positives et non intégrables), on en déduit que

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^4} dt = o_{+\infty}\left(\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt\right)$$

puis que

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt \sim_{+\infty} \frac{e^x}{x^3}$$

(le terme constant n'a pas d'importance pour l'équivalent, car  $e^x/x^3 \rightarrow +\infty$  en  $+\infty$ ). Ceci peut encore se réécrire

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt = \frac{e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right).$$

Revenant à l'intégrale initiale, on trouve finalement que

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + 2\frac{e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right)$$

(à nouveau, le terme constant "rentre" dans le  $o$ ). Bien sûr, on pourrait pousser le développement asymptotique aussi loin qu'on veut avec une méthode identique.

---

### Correction de l'exercice 35 ▲

En intégrant une fois par parties, on a

$$\forall x \geq 2, \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \left[ \frac{t}{\ln t} \right]_2^x + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}.$$

On itère ces intégrations par parties, et on tombe après  $n$  étapes sur :

$$li(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{1!x}{(\ln x)^2} + \frac{2!x}{(\ln x)^3} + \cdots + \frac{(n-1)!x}{(\ln x)^n} + n! \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}} + O(1),$$

le terme  $O(1)$  correspondant aux constantes d'intégration. Il reste à trouver un équivalent de cette dernière intégrale. En faisant une dernière intégration par parties, on a :

$$n! \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}} = \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} + (n+1)! \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+2}} + O(1).$$

Or, au voisinage de  $+\infty$ , on a

$$\frac{1}{(\ln t)^{n+2}} = o\left(\frac{1}{(\ln t)^{n+1}}\right).$$

On peut intégrer ces relations de comparaison (car tout est positif), et on obtient :

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+2}} = o\left(\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}}\right).$$

Si on reporte ceci dans l'équation précédente, on obtient que

$$n! \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}} \sim_{+\infty} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}}$$

qui est négligeable devant  $\frac{x}{(\ln x)^n}$ . Finalement, le développement asymptotique recherché est de la forme :

$$li(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{1!x}{(\ln x)^2} + \frac{2!x}{(\ln x)^3} + \cdots + \frac{(n-1)!x}{(\ln x)^n} + o\left(\frac{x}{(\ln x)^n}\right)$$

(le  $O(1)$  étant lui-même négligeable devant  $\frac{x}{(\ln x)^n}$ ).

---

### Correction de l'exercice 36 ▲

1. Notons, pour  $x > 0$ ,  $\varepsilon(x) = \sup\{|f(t)|; t \in [ax, bx]\}$ . Puisque  $f$  est continue en 0 et que  $f(0) = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ . Mais on peut écrire que

$$\left| \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt \right| \leq \varepsilon(x) \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} = \varepsilon(x) \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Ceci tend bien vers 0 si  $x$  tend vers 0.

2. Posons  $g(x) = f(x) - f(0)$ . Alors d'après la question précédente,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t} dt = 0.$$

Mais, puisque  $\int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t} dt = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ , on en déduit par linéarité que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

### Correction de l'exercice 37 ▲

On sait que  $\sin t = t + t^2 \varepsilon(t)$  où la fonction  $\varepsilon$  tend vers 0 en 0. On a donc

$$\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \int_x^{2x} \frac{dt}{t} + \int_x^{2x} \varepsilon(t) dt = \ln 2 + \int_x^{2x} \varepsilon(t) dt.$$

Puisque la fonction  $\varepsilon$  est bornée (disons par  $M$ ) au voisinage de 0, on a

$$\left| \int_x^{2x} \varepsilon(t) dt \right| \leq Mx \rightarrow 0,$$

et donc la limite recherchée est  $\ln 2$ .

### Correction de l'exercice 38 ▲

On va utiliser le fait qu'au voisinage de  $+\infty$ , on a

$$\frac{\ln(1+t)}{t} \sim_{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}$$

et qu'on sait trouver une primitive de cette dernière fonction. Posons en effet, pour  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{ax}^{bx} \frac{\ln(t)}{t} dt \\ &= \left[ \frac{1}{2} (\ln(t))^2 \right]_{ax}^{bx} \\ &= \frac{1}{2} ((\ln(bx))^2 - (\ln(ax))^2) \\ &= \frac{1}{2} (\ln(bx) - \ln(ax)) (\ln(bx) + \ln(ax)) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) (2\ln(x) + \ln(a) + \ln(b)) \\ &\sim_{+\infty} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \ln(x). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \int_{ax}^{bx} \frac{\ln(1+t)}{t} dt - g(x) &= \int_{ax}^{bx} \varphi(t) dt \\ &= \int_{ax}^{+\infty} \varphi(t) dt - \int_{bx}^{+\infty} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

où

$$\varphi(t) = \frac{\ln(1+t) - \ln(t)}{t} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{t}.$$

Mais, au voisinage de  $+\infty$ ,

$$\varphi(t) \sim_{+\infty} \frac{\frac{1}{t}}{t} = \frac{1}{t^2} \geq 0.$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann convergence,  $\varphi$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$ . En particulier,

$$\int_{ax}^{+\infty} \varphi(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \int_{bx}^{+\infty} \varphi(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit que, au voisinage de  $+\infty$ ,

$$\int_{ax}^{bx} \frac{\ln(1+t)}{t} dt = g(x) + o(1)$$

et donc

$$\int_{ax}^{bx} \frac{\ln(1+t)}{t} dt \sim_{+\infty} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \ln(x).$$

---

### Correction de l'exercice 39 ▲

1. Remarquons pour commencer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+t^x}$  est continue sur  $[1, +\infty[$ . On doit juste traiter le problème au voisinage de  $+\infty$ . Mais, si  $x < 0$ ,  $t^x$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Ainsi,

$$\frac{1}{1+t^x} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$$

et l'intégrale impropre ne converge pas au voisinage de  $+\infty$ . Si  $x = 0$ , la fonction est constante et son intégrale ne converge pas. Enfin, si  $x > 0$ , on a

$$\frac{1}{1+t^x} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^x}.$$

Puisque l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}$  converge si et seulement si  $x > 1$ , et par comparaison à une fonction positive, l'intégrale est convergente si et seulement si  $x > 1$ . Autrement dit, le domaine de définition de  $\phi$  est  $]1, +\infty[$ .

2. Soient  $1 < x < y$ . Alors, pour  $t \geq 1$ , on a  $t^x \leq t^y$ , et donc

$$\frac{1}{1+t^x} \geq \frac{1}{1+t^y}.$$

On intègre cette inégalité entre 1 et  $+\infty$ , et on trouve que  $\phi(x) \geq \phi(y)$ . La fonction  $\phi$  est bien décroissante sur  $]1, +\infty[$ .

3. On va simplement majorer la fonction : pour  $x > 1$  et  $t \geq 1$ , on a

$$0 \leq \frac{1}{1+t^x} \leq \frac{1}{t^x}.$$

On intègre cette inégalité entre 1 et  $+\infty$ , et on trouve

$$0 \leq \phi(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}.$$

Par le théorème des gendarmes,  $\phi(x)$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

---

### Correction de l'exercice 40 ▲

1. On réalise une intégration par parties, en dérivant  $f$  (qui est  $\mathcal{C}^1$ ) et en intégrant  $t \mapsto \cos(xt)$ . Il vient

$$\int_0^A f(t) \cos(xt) dt = \frac{f(A) \sin(Ax)}{x} - \frac{1}{x} \int_0^A f'(t) \sin(xt) dt.$$

Puisque  $|f(A) \sin(Ax)| \leq |f(A)|$ , il est clair que le premier terme du membre de droite tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Pour le second terme, on écrit

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^A f'(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^A |f'(t)| dt.$$

Il tend lui aussi vers 0, ce qui prouve le résultat.

2. Fixons  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $f$  est intégrable, il existe  $A > 0$  tel que  $\int_A^{+\infty} |f(t)| dt < \varepsilon$ . Mais alors

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt \right| \leq \left| \int_0^A f(t) \cos(xt) dt \right| + \int_A^{+\infty} |f(t)| dt \leq \left| \int_0^A f(t) \cos(xt) dt \right| + \varepsilon.$$

Or, d'après la première question,  $A > 0$  étant désormais fixé, il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que, pour  $x \geq x_0$ , on a

$$\left| \int_0^A f(t) \cos(xt) dt \right| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que, pour  $x \geq x_0$ , on a

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt \right| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui permet de conclure.

---

### Correction de l'exercice 41 ▲

---

1. La fonction  $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x+n}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . De plus, au voisinage de  $+\infty$ , on a

$$\left| \frac{e^{-x}}{x+n} \right| \leq e^{-x}$$

et la fonction  $x \mapsto e^{-x}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Par comparaison,  $I_n$  est bien définie.

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $x \geq 0$ , on a  $x+n \geq n > 0$ . Passant à l'inverse, et multipliant par  $e^{-x}$  qui est positif, on trouve

$$0 \leq \frac{e^{-x}}{x+n} \leq \frac{e^{-x}}{n}.$$

Toutes les fonctions qui apparaissent dans l'inégalité précédente étant intégrables sur  $[0, +\infty[$ , on peut intégrer cette inégalité entre 0 et  $+\infty$  et on trouve

$$0 \leq I_n \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n} dx = \left[ -\frac{e^{-x}}{n} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n}.$$

Par le théorème des gendarmes,  $(I_n)$  converge vers 0.

3. La réponse à la question précédente nous incite à remplacer la fonction  $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x+n}$  par  $x \mapsto \frac{e^{-x}}{n}$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} I_n - \frac{1}{n} &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+n} dx - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{-xe^{-x}}{n(x+n)} dx. \end{aligned}$$

Mais, pour tout  $x \geq 0$ ,

$$\left| \frac{-xe^{-x}}{n(x+n)} \right| \leq \frac{xe^{-x}}{n^2}$$

et donc par intégration

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \frac{-xe^{-x}}{n(x+n)} dx \right| &\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{-xe^{-x}}{n(x+n)} \right| dx \\ &\leq \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx \times \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$I_n - \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ce qui prouve le résultat demandé.

---

### Correction de l'exercice 42 ▲

---

1. ,

Au voisinage de 1,  $\ln(t) \sim t - 1$  et donc  $f(t) \sim -1$ . La fonction  $f$  admet donc une limite en 1 égale à  $-1$ . Elle se prolonge par continuité en 1 en posant  $f(1) = -1$ . On peut faire la même chose avec la fonction  $g$ ,

ou remarquer que  $g(x) = -f(e^x)$  et utiliser le travail fait pour  $f$ . Par convexité de la fonction exponentielle,  $\exp(x) \geq 1 + x$  pour tout  $x \geq 0$ . Ainsi, pour tout  $x > 0$ , on a  $g(x) \leq 1$ . Ce résultat est aussi vrai en 0 puisque  $g(0) = 1$  et  $g$  est clairement positive sur  $[0, +\infty[$  car le numérateur et le dénominateur le sont.

2. Au voisinage de 1,  $\ln(t) \sim t - 1$  et donc  $f(t) \sim -1$ . La fonction  $f$  admet donc une limite en 1 égale à  $-1$ . Elle se prolonge par continuité en 1 en posant  $f(1) = -1$ . On peut faire la même chose avec la fonction  $g$ , ou remarquer que  $g(x) = -f(e^x)$  et utiliser le travail fait pour  $f$ .

3. Par convexité de la fonction exponentielle,  $\exp(x) \geq 1 + x$  pour tout  $x \geq 0$ . Ainsi, pour tout  $x > 0$ , on a  $g(x) \leq 1$ . Ce résultat est aussi vrai en 0 puisque  $g(0) = 1$  et  $g$  est clairement positive sur  $[0, +\infty[$  car le numérateur et le dénominateur le sont.

4. D'abord, pour qu'il n'y ait pas de problème de définition du logarithme, il est impératif que  $x \geq 0$ . Par ailleurs, si  $x > 0$ , la fonction  $f$  étant continue sur  $[1, x]$  (ou sur  $[x, 1]$  si  $x < 1$ ), on intègre une fonction continue sur un segment et donc il n'y a pas de problèmes de définition. Reste le cas  $x = 0$  où on a affaire à une intégrale impropre dont on veut étudier la convergence. Mais au voisinage de 0,

$$f(x) \sim \ln x \implies f(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente (en 0), l'intégrale  $\int_0^1 f(t)dt$  converge et donc  $Li$  est bien définie en 0.

5. Il s'agit ici d'appliquer le théorème fondamental du calcul intégral, car la fonction  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .  $Li$ , qui est sa primitive s'annulant en 1, est dérivable sur cet intervalle et  $Li'(x) = f(x)$ .

6. La convergence de  $\int_0^1 f(t)dt$  signifie que  $\int_x^1 f(t)dt$  admet une limite quand  $x$  tend vers 0, et cette limite est justement égale à  $\int_0^1 f(t)dt$ . Ceci signifie que  $Li(x)$  tend vers  $Li(0)$  quand  $x$  tend vers 0 et donc que  $Li$  est continue en 0.

7. Effectuons le changement de variables  $x = -\ln t$ , de sorte que  $dt = -tdx = -e^{-x}dx$ . On trouve alors

$$Li(0) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1 - e^{-x}} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx.$$

La fonction  $x \mapsto xe^{-kx}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . De plus, au voisinage de  $+\infty$ , on a

$$xe^{-kx} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et par comparaison à une intégrale de Riemann convergente,  $\int_0^{+\infty} xe^{-kx}dx$  converge. Le calcul se fait par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} xe^{-kx} dx &= \left[ -\frac{x}{k} e^{-kx} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{k} e^{-kx} dx \\ &= \left[ \frac{-1}{k^2} e^{-kx} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{-kx} &= \frac{e^{-(n+1)x} - e^{-x}}{e^{-x} - 1} \\ &= \frac{e^{-nx} - 1}{1 - e^x} \end{aligned}$$

et donc

$$S_n = \int_0^{+\infty} x \frac{1 - e^{-nx}}{e^x - 1} dx.$$

On obtient alors immédiatement le résultat demandé. On a

$$Li(0) - S_n = \int_0^{+\infty} g(x) e^{-nx} dx$$



et donc

$$0 \leq Li(0) - S_n \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx = \frac{1}{n}.$$

Il suffit de passer à la limite dans l'inégalité précédente.

8. Effectuons le changement de variables  $x = -\ln t$ , de sorte que  $dt = -tdx = -e^{-x}dx$ . On trouve alors

$$Li(0) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1-e^{-x}} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx.$$

9. La fonction  $x \mapsto xe^{-kx}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . De plus, au voisinage de  $+\infty$ , on a

$$xe^{-kx} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et par comparaison à une intégrale de Riemann convergente,  $\int_0^{+\infty} xe^{-kx} dx$  converge. Le calcul se fait par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} xe^{-kx} dx &= \left[ -\frac{x}{k} e^{-kx} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{k} e^{-kx} dx \\ &= \left[ \frac{-1}{k^2} e^{-kx} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

10. On peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{-kx} &= \frac{e^{-(n+1)x} - e^{-x}}{e^{-x} - 1} \\ &= \frac{e^{-nx} - 1}{1 - e^x} \end{aligned}$$

et donc

$$S_n = \int_0^{+\infty} x \frac{1 - e^{-nx}}{e^x - 1} dx.$$

On obtient alors immédiatement le résultat demandé.

11. On a

$$Li(0) - S_n = \int_0^{+\infty} g(x) e^{-nx} dx$$

et donc

$$0 \leq Li(0) - S_n \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx = \frac{1}{n}.$$

12. Il suffit de passer à la limite dans l'inégalité précédente.

13. La fonction  $f$  étant continue en 1, il s'agit simplement d'étudier le problème au voisinage de l'infini.

Mais

$$\frac{\ln t}{1-t} \leq \frac{1}{1-t}$$

et  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1-t} = -\infty$ . L'intégrale est donc divergente, et  $Li(x)$  tend vers  $-\infty$  en  $+\infty$ .

14. D'après le résultat des questions précédentes, on sait que la fonction  $Li$  est décroissante sur  $[0, +\infty[$ , on connaît sa valeur en 0 et sa limite en  $+\infty$ . On en déduit aisément l'allure de la courbe représentative (on pourrait pour préciser démontrer que la fonction est convexe).

15. Posons  $h = u - v$ . Alors il est aisé de vérifier que  $h$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et que  $h'(x) = 0$  pour tout  $x \in ]0, 1[$  (rappelons que l'on a déjà calculé la dérivée de la fonction  $Li$  précédemment). Ainsi,  $h$  est constante sur l'intervalle  $]0, 1[$ .

16. Gardons les mêmes notations et faisons tendre  $x$  vers 0. La fonction  $u$  est continue en 0 et  $u(0) = Li(0) = \frac{\pi^2}{6}$ . La fonction  $v$  admet une limite quand  $x$  tend vers 0 qui vaut 0, car au voisinage de 0,

$$v(x) \sim x \ln(x)$$

et que cette dernière quantité tend vers 0 par croissance comparée des fonctions logarithmes et puissances. On en déduit que  $C = \frac{\pi^2}{6}$ .

---